

Nyilvánvaló, hogy $k > n$ esetén a kívánt kitöltés megvalósítható, hiszen nem is létezik $k \times k$ -as résztáblázat. Így a továbbiakban feltehetjük, hogy $k \leq n$.

Ha k osztója n -nek (speciálisan ha $k = n$), akkor az $n \times n$ -es tábla lefedhető $k \times k$ -as résztáblákkal úgy, hogy minden mező pontosan egyszer legyen lefedve. Ha most minden $k \times k$ -as résztáblában a számok összege negatív, akkor az egész táblázatban is az összeg negatív, noha ennek pozitívna kellene lennie. Így ebben az esetben a kitöltést nem lehet a feltételeknek megfelelően elvégezni.

A megmaradt esetben ($k \leq n$, k nem osztója n -nek) legyen $n = qk + r$, ahol q és r természetes számok, $0 < r < k$, továbbá legyen p olyan pozitív szám, amelyre

$$k - 1 < p < \frac{n}{q} - 1.$$

Ilyen szám mindig van, hiszen $k = (n - r)/q < n/q$. Az $n \times n$ -es táblázat k -adik, $2k$ -adik, ..., qk -adik oszlopában minden mezőbe írjunk $(-p)$ -t, a többi mezőbe pedig 1-et. A táblázat minden sora egyforma, így a beírt számok összege

$$n(n - q) + nq \cdot (-p) = nq \left(\frac{n}{q} - 1 - p \right) > 0$$

p választása miatt. Másrészt bármely $k \times k$ -as összefüggő résztáblázatban pontosan egy oszlopban áll $(-p)$, a többiben 1-ek, vagyis a számok összege

$$k \cdot (k - 1) + k \cdot (-p) = k(k - 1 - p) < 0.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy ez a kitöltés teljesíti a feladatban szereplő feltételeket.

Összefoglalva, a keresett (n, k) számpárok pontosan azok, amelyekben k nem osztója n -nek.

Megyesi Gábor (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., I. o. t.)