Jelöljük a PA, PB, PC hosszúságokat rendre a-val, b-vel, c-vel. Forgassuk el A körül az ABP háromszöget úgy, hogy B a C-be kerüljön, és jelöljük P új helyzetét Q-val. Mivel az ABC háromszög szabályos, az APQ háromszög is az. Így a CPQ háromszög oldalainak a hossza épp a három adott távolság. Ebből egyrészt következik, hogy a feladat csak akkor oldható meg, ha az a, b, c oldalakkal háromszög szerkeszthető, másrészt a $PQ = a$, $QC = = b$, $CP = c$ oldalakkal rajzolt háromszög PQ oldala fölé kifelé rajzolt APQ szabályos háromszög A csúcsa a C-vel együtt meghatározza az ABC háromszög AC oldalát. Jelöljük ezt d-vel. A koszinusz tételt először az APC, majd a CPQ háromszögre alkalmazva kapjuk, hogy

$$d^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(60^\circ + \beta) = a^2 + c^2 - 2ac\left(\frac{1}{2}\cos\beta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta\right) =$$
$$= a^2 + c^2 - \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) + \sqrt{3}ac\sin\beta = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}t,$$

ahol β a CPQ szöget, t a CPQ háromszög területét jelöli.

Jelöljük még D-nek az ABC síkon levő vetületét K-val. Pitagorasz tétele alapján $PD^2 = PK^2 + KD^2$. Ez utóbbi d alapján könnyen meghatározható, hiszen ha a tetraéder centrumát O-val jelöljük, akkor O negyedeli a DK szakaszt, és $AO = OD$. Emiatt az AKO háromszögben

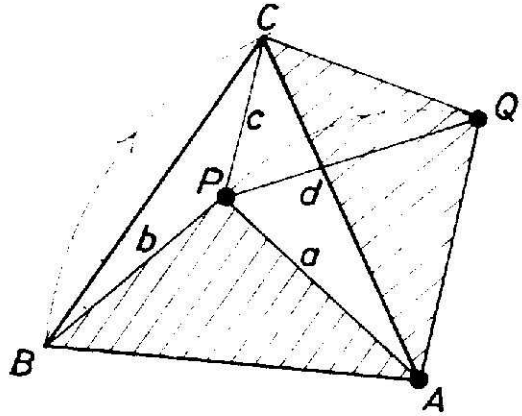
$$\left(\frac{3}{4}DK\right)^2 = \left(\frac{1}{4}DK\right)^2 + AK^2,$$

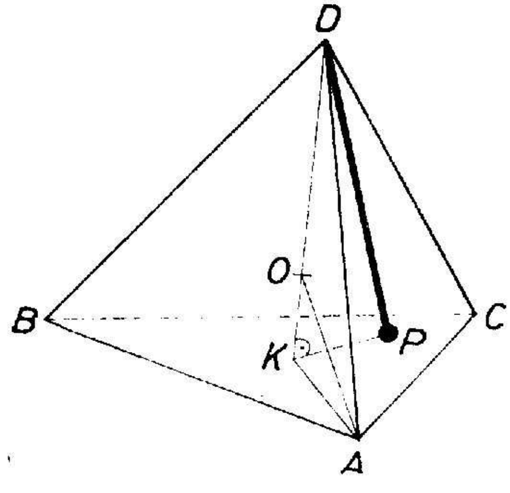
tehát $DK^2 = 2AK^2 = \frac{2}{3}d^2$. Belátjuk, hogy

$$PK^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - AK^2, \tag{1}$$

amiből kapjuk, hogy

$$PD^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \frac{d^2}{3} + \frac{2d^2}{3} = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) =$$
$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2t}{\sqrt{3}}.$$





Ismeretes, hogy az a, b, c oldalú háromszög területére

$$16t^2=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$$

teljesül, tehát

$$PD^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}. \tag{2}$$

Be kell még látnunk az (1) összefüggést. Válasszuk a koordináta-rendszer origójának a K pontot, és jelöljük a szóban forgó pontok koordinátáit a megfelelő kisbetűkkel és egyes, illetve kettes indexszel. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} PK^2&=p_1^2+p_2^2,\\ a^2&=(a_1-p_1)^2+(a_2-p_2)^2,\\ b^2&=(b_1-p_1)^2+(b_2-p_2)^2,\\ c^2&=(c_1-p_1)^2+(c_2-p_2)^2,\\ AK^2&=a_1^2+a_2^2. \end{aligned}$$

Ezeket (1)-be helyettesítve, és figyelembe véve, hogy $AK^2=BK^2=CK^2$, $a_1+b_1+c_1=0$, $a_2+b_2+c_2=0$, valóban azonosságot kapunk. Az utóbbi két összefüggés azért igaz, mert K az ABC háromszögben nemcsak a körülírt kör középpontja, de súlypont is.

Megjegyzés. Az a, b, c, d szakaszok közti összefüggés szimmetrikus alakra hozható:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=a^4+b^4+c^4+d^4.$$