

Lássuk be először, hogy A_2 igaz. Legyenek a számaink a és b , számtani és mértani közepüknek hányadosa, k egész szám. Az

$$\frac{a+b}{2} : \sqrt{ab} = k$$

feltételt kissé más alakba írva

$$(1) \quad k^2(a-b)^2 = (k^2-1)(a+b)^2.$$

A bal oldalon egy egész szám négyzete áll, tehát a jobb oldalnak, és így (k^2-1) -nek is teljes négyzetnek kell lennie. Ez azonban csak $k=1$ esetén teljesül, tehát (1) mindkét oldalának értéke 0, ahonnan $a=b$.

Az $n > 2$ esetekben A_n hamis voltát úgy látjuk be, hogy keresünk olyan $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív egészeket, melyek nem mind egyenlőek, és melyekre a

$$(2) \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}$$

hányados értéke egész.

Ha $n > 2$ és páros, akkor az

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 1 \quad \text{és} \quad a_n = (n-1)^n$$

választás megfelel. Ez esetben ugyanis nyilván $a_n \neq 1$ és (2) értéke

$$\frac{(n-1) + (n-1)^n}{n \cdot (n-1)} = \frac{(n-1)^{n-1} + 1}{n}$$

ami egész, mivel a kitevő páratlan, tehát a számláló osztható $(n-1) + 1 = n$ -nel.

Ha pedig $n > 2$ páratlan, akkor legyen

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-2} = 1, \quad a_{n-1} = (n-2)(n-1)^n \quad \text{és} \quad a_n = (n-2)^{n-1}n^n.$$

Ebben az esetben is $a_n \neq 1$ és (2) értéke

$$(3) \quad \frac{(n-2) + (n-2)(n-1)^n + (n-2)^{n-1}n^n}{n \cdot (n-2)(n-1)n} = \frac{1 + (n-1)^n + (n-2)^{n-2}n^n}{n^2(n-1)}.$$

Elegendő megmutatnunk, hogy a jobb oldalon szereplő hányados számlálóját külön-külön osztható $(n-1)$ -gyel és n^2 -tel is, hiszen $(n-1)$ és n^2 relatív prímek, és így ebből már következik, hogy (3) értéke egész. Ha ezt a számlálót az

$$((n-2)^{n-2} + 1)n^n - (n^n - 1) + (n-1)^n$$

alakba írjuk, akkor láthatóan mindhárom tag, tehát összegük is osztható $(n-1)$ -gyel. Végül az n^2 -tel való oszthatósághoz $n > 2$ miatt elegendő megmutatnunk, hogy

$$1 + (n-1)^n = (1 + (n-1)) \cdot [(n-1)^{n-1} - (n-1)^{n-2} + \dots - (n-1) + 1]$$

osztható n^2 -tel. A szorzat első tényezője éppen n . A második tényezőben az összeadandók n -nel osztva $+1$ vagy -1 maradékot adnak attól függően, hogy $(n-1)$ kitevője páros vagy páratlan. Ezeket a maradékokat váltakozó előjellel összeadva éppen n -et kapunk, tehát a második tényező is osztható n -nel.

Ezzel megmutattuk, hogy a (3) hányados értéke egész, s így a feladat állítását is beláttuk.

Drávucz Katalin (Szolnok, Verseyhy F. Gimn., N. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Ez a feladat nehéznek bizonyult. Érdekes, hogy a jó megoldók közül is soknak beletörött a bicskája. Közülük ezt sokan el is ismerték, de akadtak olyanok is, akik – miután páros n -re megadták a jó ellenpéldát – kijelentették, hogy páratlan n -re hasonló a helyzet.