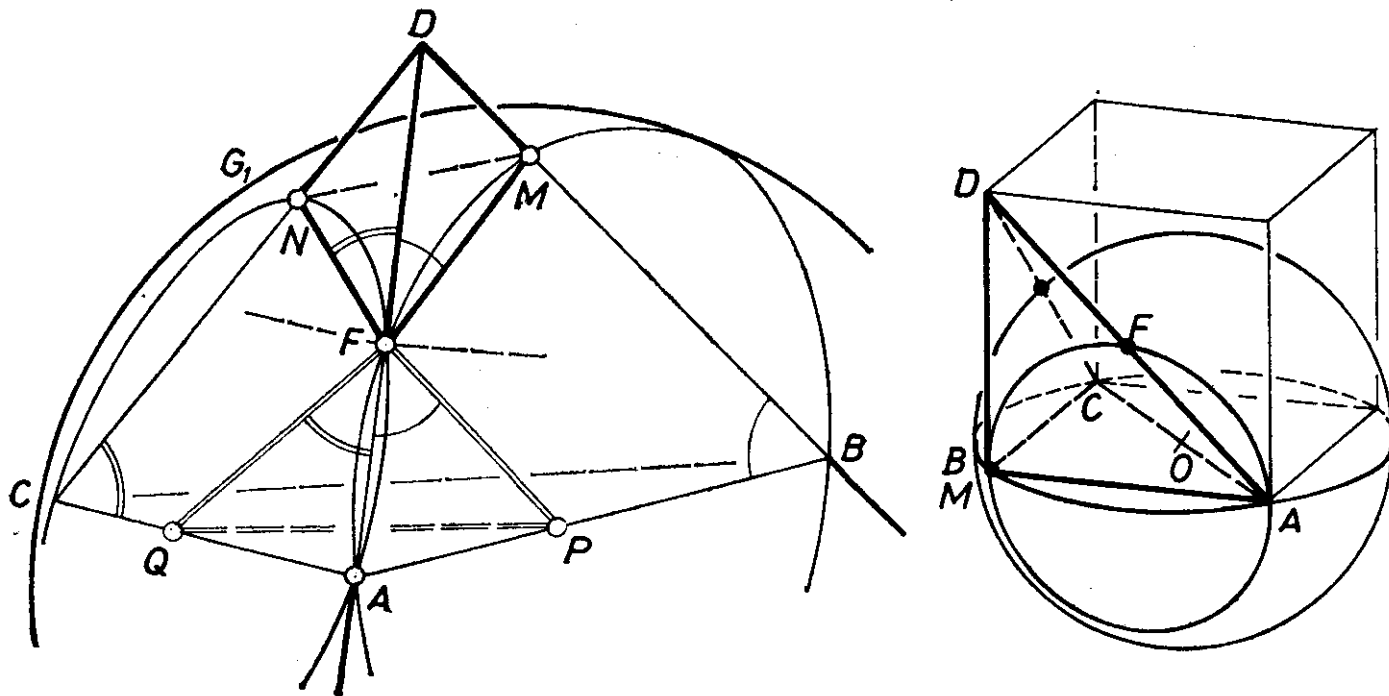


Nem lesz szükségünk a bizonyításhoz az F pont speciálisnak előírt helyzetére. Ábránkon DA -t éreztetjük legkisebbnek a D -ben összefutó oldalélek közül, így az M és N , valamint a P és Q pontok valóban belső pontok lesznek az illető élszakaszon.



Ezt azonban szintén nem fogjuk felhasználni. – A hasonlóságot azzal bizonyítjuk, hogy kifejezzük a kérdéses háromszögek oldalait a tetraéder élével és az F helyzetét meghatározó DF távolsággal.

G_1 -ből a DAB , DBC , DCA oldallapok egy-egy kört metszenek ki, ezekhez képest az illető két-két oldalél szerepe szelőpár, ennél fogva a szelőszakaszokra ismert tétel szerint

$$(1) \quad DF \cdot DA = DM \cdot DB = DN \cdot DC,$$

így M és N távolsága a csúcstól

$$DM = \frac{DA}{DB} \cdot DF, \quad DN = \frac{DA}{DC} \cdot DF.$$

Más rendezésben írjuk az (1) első két szorzatát:

$$\frac{DF}{DM} = \frac{DB}{DA},$$

amihez hozzávéve, hogy a balról és jobbról álló szakaszpár közti szög azonos, kapjuk, hogy a DFM és DBA háromszögek hasonlóak, a csúcsok a felsorolások rendjében felelnek meg egymásnak. Ugyanígy $DFN_{\Delta} \sim DCA_{\Delta}$, és $DMN_{\Delta} \sim DCB_{\Delta}$.

Ezekből az FMN háromszög oldalaira

$$FM = \frac{DF}{DB} \cdot BA,$$

$$MN = \frac{DM}{DC} \cdot CB = \frac{CB}{DC} \cdot \frac{DA}{DB} \cdot DF,$$

és a kettőnek az aránya tüstént

$$FM : MN = BA : \frac{CB \cdot DA}{DC} = BA \cdot DC : CB \cdot DA.$$

Továbbá $NF = \frac{DF}{DC} \cdot AC$, tehát

$$FM : NF = \frac{BA}{DB} : \frac{AC}{DC} = BA \cdot DC : AC \cdot DB.$$

Ezek szerint van olyan λ , hogy

$$FM = \lambda \cdot AB \cdot DC; \quad MN = \lambda \cdot BC \cdot DA; \quad NF = \lambda \cdot CA \cdot DB,$$

vagyis az FMN háromszög oldalaival arányos számokat kapunk, ha alkalmasan 3 párba állítjuk a tetraéder 6 élét, és a párokat összeszorozzuk. Minden egyes párt egy alapél és egy oldalél alkot, az FM oldal arányszámában az ezt a szakaszt tartalmazó oldallap AB alapéle szerepel a szemben fekvő DC oldaléllal szorozva s í. t.

Látható, hogy F -nek nincs kiemelt szerepe M és N -hez képest a G_1 meghatározásában, vehettük volna A , B , C mellé M -et is, vagy N -et.

És ezzel készen is vagyunk. A szorzatokban szereplő élpárok mindig ugyanazok maradnak, bármelyik lapból mint alaplapból indulunk is ki a gömb meghatározásához, tehát a gömbök által a megfelelő élhármasokból kimetszett pontok révén meghatározott háromszög alakja (azaz oldalainak aránya) független az alaplap és a negyedik pont megválasztásától.

A feladat előírása szerint a DBC alaplapból indulva, az FP , PQ , QF metszetoldalt a DB , BC , CD alapélre támaszkodó oldallap tartalmazza. Ezeket sorra FN , NM , MF -nek előbbi kifejezése tartalmazza, tehát az állítás szerinti hasonlóságban F az F -nek, P az N -nek, Q pedig az M -nek felel meg.

Valóban nem használtuk fel, hogy F felezi a DA oldalélt. Ebből az következik, hogy ha F befutja a DA él belsejét, akkor (1) alapján a keletkező FMN síkok egymással párhuzamosak.

Megjegyzések. 1. Ha F befut D -be, akkor persze M és N is, G_1 helyén az $ABCD$ tetraéder G_0 körülírt gömbje áll előttünk. Azt sejtjük ebből, hogy az FMN sík párhuzamos G_0 -nak D -beli érintősíkjával, az FQP sík pedig az A -beli érintősíkkal.

2. Megerősíti ezt a sejtést, hogy a felhasznált hasonló háromszögpárokból

$$DFM\triangleleft = DBA\triangleleft \quad \text{és} \quad DFN\triangleleft = DCA\triangleleft.$$

Az FQP háromszög esetére hasonlóan kapnánk a következőket:

$$AFP\triangleleft = ABD\triangleleft \quad \text{és} \quad AFQ\triangleleft = ACD\triangleleft.$$

tehát

$$DFM\triangleleft = AFP\triangleleft \quad \text{és} \quad DFN\triangleleft = AFQ\triangleleft.$$

vagyis az ADB lapban az FM és FP egyenesek, az ADC lapban az FN és FQ egyenesek egymás tükörképei az F -ben DA -ra merőlegesen álló tengelyre nézve. És ezeket folytatva az FMN és FPQ síkok egymás képei az F -ben DA -ra merőlegesen álló tükörsíkra nézve. (Most valóban szemléletesebb először $DF = AF$ -re gondolni.)

3. Előfordulhat, hogy pl. M azonosnak adódik B -vel, mert DB érinti a gömböt. Legyen például B egy kocka csúcса, A , C , D a vele szomszédos csúcсоk, és tegyük AC -t a G_1 átmérőjévé.

Ha B -t és C -t még nem rögzítettük a DB , DC félegyeneseken, csupán A -t és F -et, az ezeken átmenő, elég nagy sugarú G_1 gömb általában 2–2 pontban metszi a félegyeneseket, azokat 4-féleképpen is kioszthatjuk B és M , ill. C és N szerepére – ezek által válik meghatározottá a tetraéder – és dől el, hogy M és N az élszakaszon van, vagy meghosszabbításán. Emiatt volt célszerűbb a szelőszakaszok tételét használni, semmint a húrnégyszögek tulajdonságait, mert az előforduló húrnégyszögek hurkoltak is lehetnek.