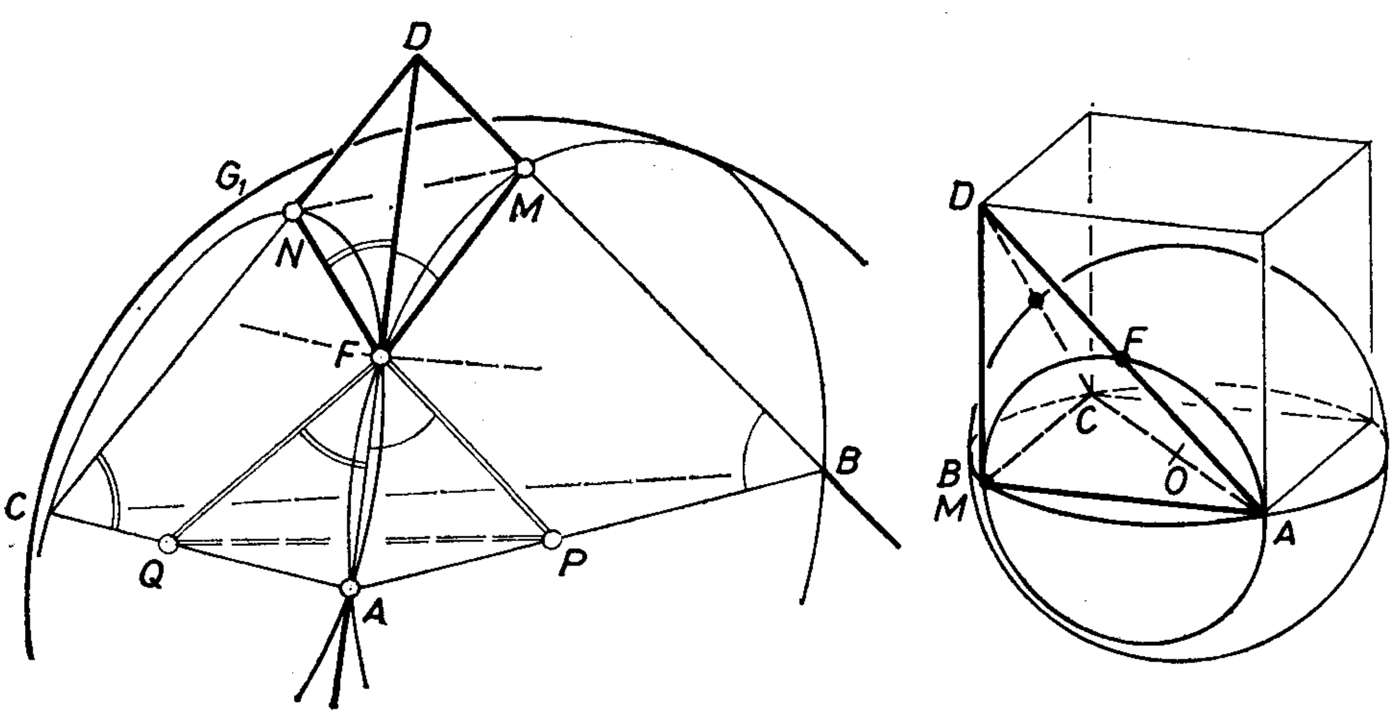
Nem lesz szükségünk a bizonyításhoz az F pont speciálisnak előírt helyzetére. Ábránkon DA-t éreztetjük legkisebbnek a D-ben összefutó oldalélek közül, így az M és N, valamint a P és Q pontok valóban belső pontok lesznek az illető élszakaszon.



Ezt azonban szintén nem fogjuk felhasználni. – A hasonlóságot azzal bizonyítjuk, hogy kifejezzük a kérdéses háromszögek oldalait a tetraéder éleivel és az F helyzetét meghatározó DF távolsággal.

G_1-ből a DAB, DBC, DCA oldallapok egy-egy kört metszenek ki, ezekhez képest az illető két-két oldalél szerepe szelőpár, ennélfogva a szelőszakaszokra ismert tétel szerint

$$DF \cdot DA = DM \cdot DB = DN \cdot DC, \tag{1}$$

így M és N távolsága a csúcstól

$$DM = \frac{DA}{DB} \cdot DF, \qquad DN = \frac{DA}{DC} \cdot DF.$$

Más rendezésben írjuk az (1) első két szorzatát:

$$\frac{DF}{DM} = \frac{DB}{DA},$$

amihez hozzávéve, hogy a balról és jobbról álló szakaszpár közti szög azonos, kapjuk, hogy a DFM és DBA háromszögek hasonlók, a csúcsok a felsorolások rendjében felelnek meg egymásnak. Ugyanígy $DFN_\triangle \sim DCA_\triangle$, és $DMN_\triangle \sim DCB_\triangle$.

Ezekből az FMN háromszög oldalaira

$$FM = \frac{DF}{DB} \cdot BA,$$

$$MN = \frac{DM}{DC} \cdot CB = \frac{CB}{DC} \cdot \frac{DA}{DB} \cdot DF,$$

és a kettőnek az aránya tüstént

$$FM : MN = BA : \frac{CB \cdot DA}{DC} = BA \cdot DC : CB \cdot DA.$$

Továbbá $NF = \dfrac{DF}{DC} \cdot AC$, tehát

$$FM : NF = \frac{BA}{DB} : \frac{AC}{DC} = BA \cdot DC : AC \cdot DB.$$

Ezek szerint van olyan λ, hogy

$$FM = \lambda \cdot AB \cdot DC; \qquad MN = \lambda \cdot BC \cdot DA; \qquad NF = \lambda \cdot CA \cdot DB,$$

vagyis az FMN háromszög oldalaival arányos számokat kapunk, ha alkalmasan 3 párba állítjuk a tetraéder 6 élét, és a párokat összeszorozzuk. Minden egyes párt egy alapél és egy oldalél alkot, az FM oldal arányszámában az ezt a szakaszt tartalmazó oldallap AB alapéle szerepel a szemben fekvő DC oldaléllel szorozva s í. t.

Látható, hogy F-nek nincs kiemelt szerepe M és N-hez képest a G_1 meghatározásában, vehettük volna A, B, C mellé M-et is, vagy N-et.

És ezzel készen is vagyunk. A szorzatokban szereplő élpárok mindig ugyanazok maradnak, bármelyik lapból mint alaplapból indulunk is ki a gömb meghatározásához, tehát a gömbök által a megfelelő élhármasokból kimetszett pontok révén meghatározott háromszög alakja (azaz oldalainak aránya) független az alaplap és a negyedik pont megválasztásától.

A feladat előírása szerint a DBC alaplapból indulva, az FP, PQ, QF metszetoldalt a DB, BC, CD alapélre támaszkodó oldallap tartalmazza. Ezeket sorra FN, NM, MF-nek előbbi kifejezése tartalmazza, tehát az állítás szerinti hasonlóságban F az F-nek, P az N-nek, Q pedig az M-nek felel meg.

Valóban nem használtuk fel, hogy F felezi a DA oldalélt. Ebből az következik, hogy ha F befutja a DA él belsejét, akkor (1) alapján a keletkező FMN síkok egymással párhuzamosak.

Megjegyzések. 1. Ha F befut D-be, akkor persze M és N is, G_1 helyén az $ABCD$ tetraéder G_0 körülírt gömbje áll előttünk. Azt sejtjük ebből, hogy az FMN sík párhuzamos G_0-nak D-beli érintősíkjával, az FQP sík pedig az A-beli érintősíkkal.

2. Megerősíti ezt a sejtést, hogy a felhasznált hasonló háromszögpárokból

$$DFM\sphericalangle = DBA\sphericalangle \qquad \text{és} \qquad DFN\sphericalangle = DCA\sphericalangle.$$

Az FQP háromszög esetére hasonlóan kapnánk a következőket:

$$AFP\sphericalangle = ABD\sphericalangle \qquad \text{és} \qquad AFQ\sphericalangle = ACD\sphericalangle.$$

tehát

$$DFM\sphericalangle = AFP\sphericalangle \qquad \text{és} \qquad DFN\sphericalangle = AFQ\sphericalangle.$$

vagyis az ADB lapban az FM és FP egyenesek, az ADC lapban az FN és FQ egyenesek egymás tükörképei az F-ben DA-ra merőlegesen álló tengelyre nézve. És ezeket folytatva az FMN és FPQ síkok egymás képei az F-ben DA-ra merőlegesen álló tükörsíkra nézve. (Most valóban szemléletesebb először $DF = AF$-re gondolni.)

3. Előfordulhat, hogy pl. M azonosnak adódik B-vel, mert DB érinti a gömböt. Legyen például B egy kocka csúcsa, A, C, D a vele szomszédos csúcsok, és tegyük AC-t a G_1 átmérőjévé.

Ha B-t és C-t még nem rögzítettük a DB, DC félegyeneseken, csupán A-t és F-et, az ezeken átmenő, elég nagy sugarú G_1 gömb általában 2–2 pontban metszi a félegyeneseket, azokat 4-féleképpen is kioszthatjuk B és M, ill. C és N szerepére – ezek által válik meghatározottá a tetraéder – és dől el, hogy M és N az élszakaszon van, vagy meghosszabbításán. Emiatt volt célszerűbb a szelőszakaszok tételét használni, semmint a húrnégyszögek tulajdonságait, mert az előforduló húrnégyszögek hurkoltak is lehetnek.