

Legyen A_2, B_2, C_2, D_2 rendre az AB, BC, CD, DA oldalakat $\lambda : (1 - \lambda)$ arányban osztó pont. Ha a négyszög ABC szögét tekintjük, a BA szögszáron

$$A_1B = \lambda \cdot AB, \quad A_2B = (1 - \lambda)AB,$$

a BC szögszáron

$$B_2B = \lambda \cdot BC, \quad B_1B = (1 - \lambda)BC.$$

A párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján $A_1B_2 \parallel A_2B_1 \parallel AC$. Ez viszont arra jogosít fel, hogy a párhuzamos szelők tételének a szelődarabokra vonatkozó következményét alkalmazzuk, mely szerint

$$AC : |A_1B_2| : A_2B_1 = AB : |A_1B| : A_2B.$$

Ennek alapján, figyelembe véve az előbbi összefüggéseket:

$$A_1B_2 = \lambda \cdot AC, \quad A_2B_1 = (1 - \lambda)AC.$$

A_1A_2 -re és B_1B_2 -re kivonással azt kapjuk, hogy

$$A_1A_2 = (2\lambda - 1)AB, \quad B_1B_2 = (2\lambda - 1)BC$$

(tekintettel arra, hogy $\lambda \geq 1/2$).

Az $A_1A_2B_1$ háromszög oldalain a háromszög-egyenlőtlenség alapján fennáll az

$$A_1B_1 \leq A_1A_2 + A_2B_1$$

egyenlőtlenség, azaz

$$A_1B_1 \leq (2\lambda - 1)AB + (1 - \lambda)AC.$$

Ennek mintájára (felhasználva, hogy az $ABCD$ négyszög csúcsai a feladatban egyenrangú szerepet játszanak) további három egyenlőtlenséget írhatunk fel:

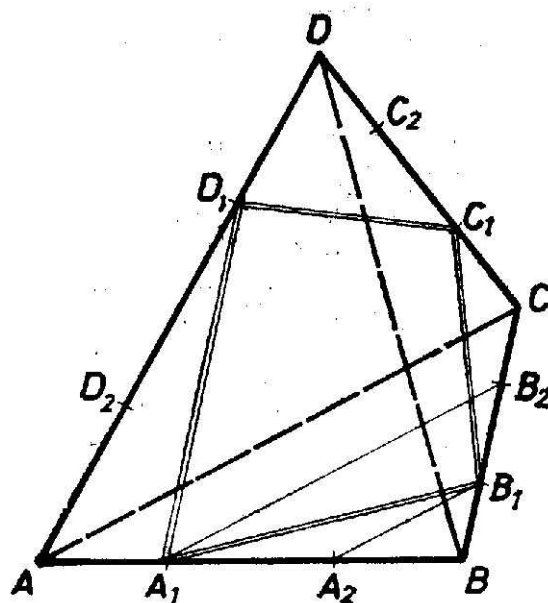
$$B_1C_1 \leq (2\lambda - 1)BC + (1 - \lambda)BD,$$

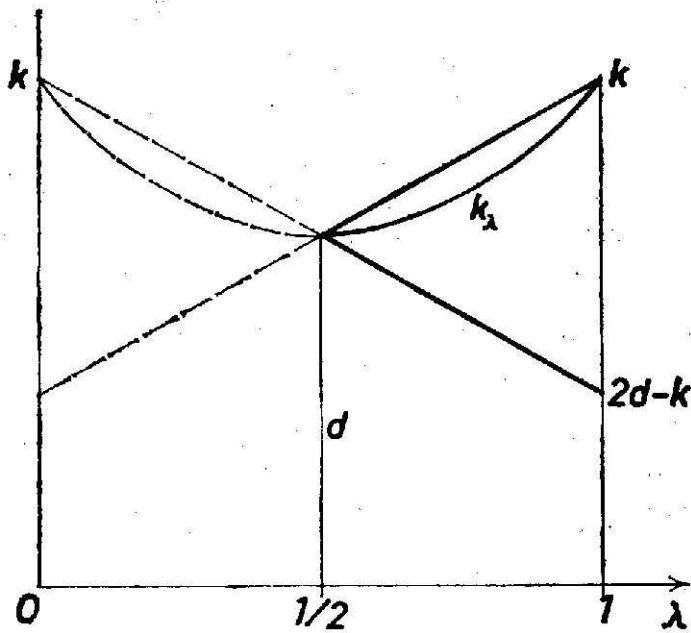
$$C_1D_1 \leq (2\lambda - 1)CD + (1 - \lambda)CA,$$

$$C_1A_1 \leq (2\lambda - 1)DA + (1 - \lambda)DB.$$

A négy egyenlőtlenségből összeadással (figyelembe véve a feladatban szereplő jelöléseket) kapjuk, hogy

$$k_\lambda \leq (2\lambda - 1)k + 2(1 - \lambda)d.$$





Ezzel a feladat állításának egyik részét igazoltuk. Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha azok a háromszögek, amelyekre az egyenlőtlenségeket felírtuk, elfajulók. $\lambda = 1/2$ és $\lambda = 1$ esetén fenn is áll az egyenlőség, hiszen az előbbi esetben $k_\lambda = d$, az utóbbiban pedig $k_\lambda = k$.

Írjuk fel most a háromszög-egyenlőtlenséget az $A_1B_1B_2$ háromszögre abban az alakban, amely két oldal különbségének abszolút értéke és a harmadik oldal között teremt kapcsolatot. Eszerint

$$|A_1B_2 - B_1B_2| \leq A_1B_1,$$

vagyis

$$|\lambda \cdot AC - (2\lambda - 1)BC| \leq A_1B_1.$$

Ennek mintájára felírhatók még

$$|\lambda \cdot BD - (2\lambda - 1)CD| \leq B_1C_1$$

$$|\lambda \cdot CA - (2\lambda - 1)DA| \leq C_1D_1$$

$$|\lambda \cdot DB - (2\lambda - 1)AB| \leq D_1A_1$$

Az egyenlőtlenségekben felhasználva még, hogy $|x + y| \leq |x| + |y|$, következik a feladat állításának másik része:

$$|2\lambda d - (2\lambda - 1)k| \leq k_\lambda.$$

$\lambda = 1/2$ esetén itt is egyenlőség áll fenn ($d = k_\lambda$), $\lambda = 1$ esetén viszont nem. Az utóbbi esetben ugyanis az egyenlőtlenségek felírásánál tekintetbe vett háromszögek nem elfajulók, hacsak az $ABCD$ négyszög nem elfajuló. Megjegyezzük még, hogy a feladatban szereplő abszolút értékjel felesleges, mivel konvex négyszögek esetén $2\lambda d - (2\lambda - 1)k$ nem lehet negatív. Konvex négyszögekre ugyanis $k/2 \leq d$, ezért $k - d \leq k/2$, innen $2\lambda(k - d) \leq \lambda k$, és mivel $\lambda k \leq k$, $2\lambda k - 2\lambda d \leq k$.

Csőrgő Tamás (Gyöngyös, Berze Nagy J. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A bizonyított egyenlőtlenség-láncban szereplő függvényeket érdemes ábrázolni. Az ábrából kiolvasható, hogy az állítás következik abból, hogy k_λ a λ konvex függvénye. (L. L.)