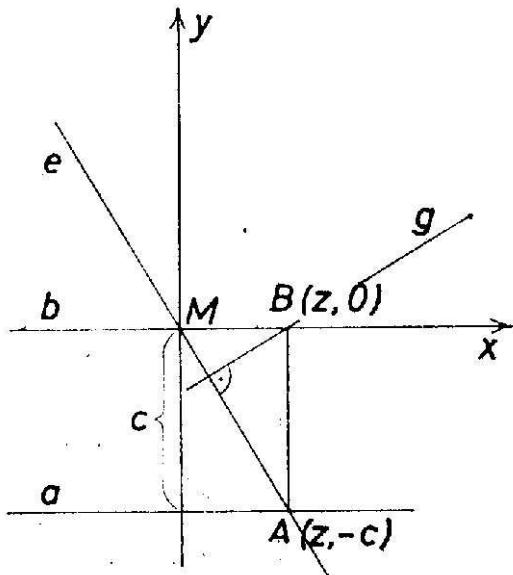


I. megoldás. Ha az állítás érvényes a b egyenesre, akkor tetszőleges, b -vel párhuzamos b' egyenesre is igaz. Ugyanis a b -t b' -be vivő, rájuk merőleges eltolásvektor jellemzi a B eltolódását is, a kérdéses g egyenesét is, a forgó e egyenes minden helyzetében (hacsak A létrejön), tehát a g egyenessereggel együtt a feladat állításában szereplő parabola is ugyanúgy tolódik el.

Vehetjük tehát b helyére a vele párhuzamos, M -en átmenő egyenest, tovább az egyszerűség kedvéért ezt jelöljük b -vel. És vegyük mindjárt ezt derékszögű koordinátarendszerünk első tengelyéül, origójául M -et, és legyen az a egyenes egyenlete $y = -c$, ahol $c > 0$.



Jellemezzük e helyzetét az a -n futó $A(z, -c)$ pontjával, ahol z paraméter. Nem jön létre A , B és g , ha $e \parallel a$, ha pedig $e \perp a$, azaz $z = 0$, akkor g azonos b -vel, hiszen ekkor $B = M$. Minden más esetben e és g iránytangense $-c/z$, ill. z/c , a B pont helyzete $(z, 0)$, ezekből g egyenlete

$$(1) \quad \frac{y}{x-z} = \frac{z}{c}, \quad y = \frac{z}{c}x - \frac{z^2}{c}.$$

Ebben az eredményben benne van az előre elintézett $z = 0$ eset is.

A kapott egyenlet pedig azonos az $y = \frac{x^2}{4c}$ parabolához a $\left(2z, \frac{z^2}{c}\right)$ pontjában húzott érintő egyenletével. Ugyanis az érintő iránytangense deriválás útján bármely x_0 pontban $\frac{x_0}{2c}$, tehát egyenlete

$$\frac{y - \frac{x_0^2}{4c}}{x - x_0} = \frac{x_0}{2c},$$

ill. $x_0 = 2z$ mellett

$$\frac{y - \frac{z^2}{c}}{y - 2z} = \frac{z}{c},$$

átrendezve valóban azonos (1)-gyel.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A $c > 0$ kikötés nem volt lényeges, csak a szemléletesség, az ábrával való egyezés kedvéért alkalmaztuk; a feladat szerint mindenesetre $c \neq 0$.

II. megoldás. Előkészítésül fel fogjuk használni a parabola következő tulajdonságát. Legyen a parabola tengelye t , csúcsa C , az itt húzott érintője c , továbbá egy tetszőleges P pontjához tartozó érintőjének c -vel, t -vel való metszéspontja Q , ill. R , ekkor Q felezi a PR szakaszt. Ekvivalens ezzel, hogy Q felezi a CP' szakaszt, ahol P' a P -nek c -n levő vetülete.

Jelöljük t^* -gal az M -en átmenő, a -ra merőleges egyenest. Erre tengelyesen szimmetrikus a kiindulási a , b , M alakzat, és ezért t^* a forgó e egyenesből leszarmaztatott g egyenesek seregének is szimmetriatengelye, tehát az állítás szerinti parabola tengelye csak t^* lehet. (Ha ugyanis e -nek e_1 és e_2 helyzetei egymás képei t^* -ra, akkor ugyanez áll a megfelelő A_1 - és A_2 -re, B_1 - és B_2 -re, MA_1 -re és MA_2 -re, tehát g_1 és g_2 -re is.) Tovább t^* helyett a t jelet írjuk.

Jelöljük t -nek a -n, b -n levő pontját S -sel, T -vel, a T -nek B -re való tükörképét T' -vel, továbbá P -vel a g -nek azt a pontját, amelyre PT' merőleges b -re. Belátjuk, hogy P mértani helye egy parabola. (P létezik, ha g létrejött.)

Szerkesztésünk alapján BPT' és MAS hasonló (derékszögű) háromszögek, ebből

$$(2) \quad PT' = \frac{BT'}{MS} \cdot AS = \frac{TT'^2}{4MS},$$

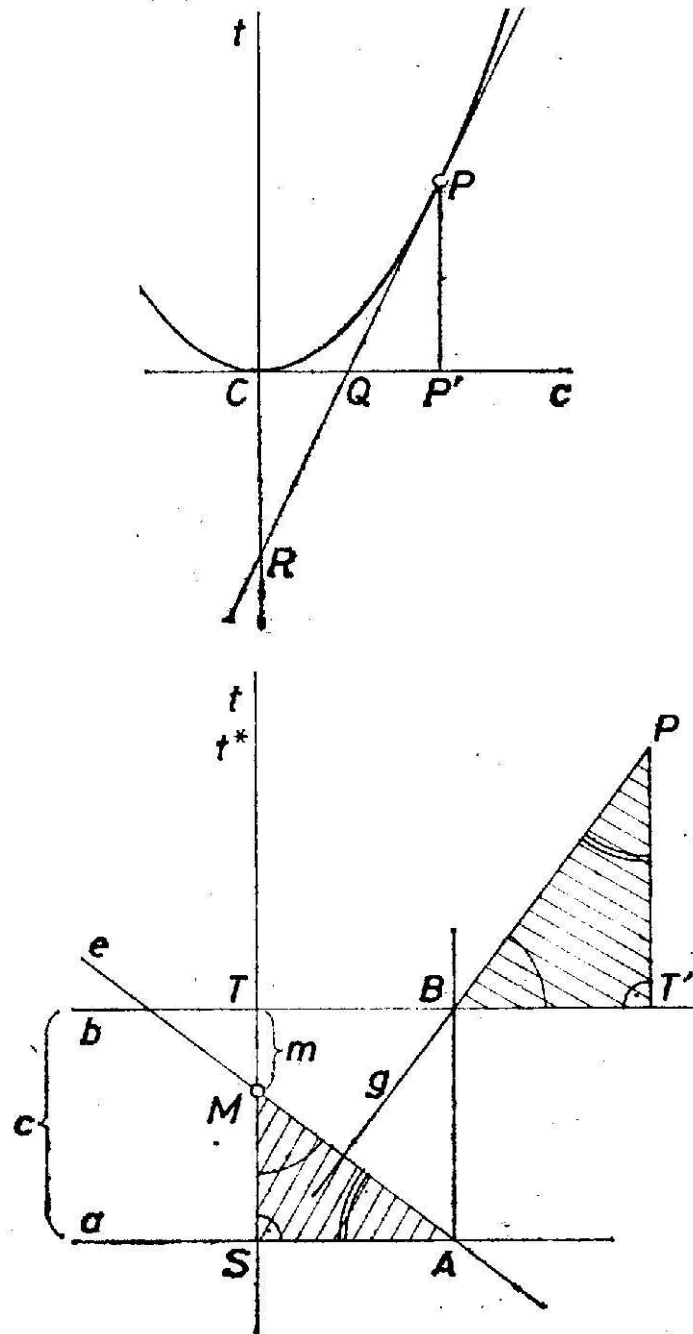
hiszen $AS = BT = BT' = TT'/2$. Ha pedig speciálisan e merőleges a -ra, vagyis azonos t -vel, akkor $A = S$, $B = T$, $g = b$ és $P = T$, tehát (2) érvényes erre az esetre is.

A b, t egyenespárt a derékszögű koordináta-rendszer első, ill. második tengelyének véve (2) így alakul:

$$(2a) \quad y = \frac{x^2}{4MS},$$

ami valóban parabola egyenlete.

Azt kell még belátnunk az állítás igazolásához, hogy a (2a) parabolához P -ben fektetett érintő éppen a felhasznált g egyenes.



Mivel a parabola tengelye az ST egyenes, s tengelypontja a T pont, azért ez az érintő – közismerten – átmegy TT' felezőpontján, azaz a B ponton. Ám a g egyenes is ilyen, hiszen úgy vettük fel, hogy átmenjen B ponton, és a P pontot rajta vettük fel. Így – mivel a P pontban a parabolához csak egy érintő húzható, s ennek tulajdonságaival a g egyenes rendelkezik, ezért a fent megadott parabolát a g minden P esetén a P pontban érinti. És bármely g ugyanazt a fent megadott parabolát érinti, mivel a parabola adatai az e egyenestől – és így a P ponttól – függetlenek.