

Legyen k olyan pozitív egész, amelyre $k^2 + 2k \geq n$. Felhasználva, hogy az $x_1, x_2, \dots$ pozitív tagú sorozat, s tagjai monoton csökkennek, (2) bal oldala legfeljebb.

$$\begin{aligned} x_1 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + x_4 \left(\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{8} \right) + \dots + x_{k^2} \left(\frac{1}{k^2} + \dots + \frac{1}{k^2 + 2k} \right) = \\ = \frac{x_1}{1} f(1) + \frac{x_4}{2} f(2) + \dots + \frac{x_{k^2}}{k} f(k), \end{aligned}$$

ahol

$$(3) \quad f(i) = i \left(\frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^2 + 1} + \dots + \frac{1}{i^2 + 2i} \right).$$

Megmutatjuk, hogy $f(i) < 2$ minden pozitív egész i -re, ebből (1) alapján azonnal adódik, hogy

$$(4) \quad \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} < 2.$$

Az $f(i) < 2$ egyenlőtlenséget bizonyítandó, (3) jobb oldalán a zárójelben álló kifejezést osszuk két részre. A $(2i+1)$ összeadandó közül az első i darabot helyettesítsük $1/i^2$ -tel, a többi $(i+1)$ -et pedig $1/(i^2+i)$ -vel. Ezzel $f(i)$ -nél nagyobb számot kapunk, tehát

$$f(i) < i \left(i \frac{1}{i^2} + (i+1) \frac{1}{i^2+i} \right) = 2,$$

ahogyan állítottuk. Ezzel (4)-et és így a feladat állítását is igazoltuk. **(K. M.)**

Csere Kálmán (Veszprém, Lovassy L. Gimn.. IV. o. t.)

Megjegyzés. Bizonyítottuk, hogy a (2) egyenlőtlenség jobb oldalán 3 helyett 2-t írva a feladat állítása igaz marad. Megmutatjuk, hogy 2-nél kisebb számokra (2) már nem feltétlenül teljesül. Láttuk ugyanis, hogy $f(i) < 2$, másrészt $f(i) =$

$$= i \left(\frac{1}{i^2} + \dots + \frac{1}{i^2 + 2i} \right) > i \frac{2i+1}{i^2 + 2i} > 2 - \frac{3}{i}.$$

Most az $x_1, x_2, \dots, x_{k^2+2k}$ értékeket mind az $(1/1 + 1/2 + \dots + 1/k)$ szám reciprokának választjuk, és legyen $x_i = 0$, ha $i > k^2 + 2k$. Itt k egy később megválasztandó pozitív egészt jelöl. Az (1)-beli egyenlőtlenségek mind teljesülnek, és (2) bal oldalának értéke az $n = k^2 + 2k$ helyen éppen

$$\begin{aligned} A &= \frac{x_1}{1} f(1) + \frac{x_4}{2} f(2) + \dots + \frac{x_{k^2}}{k} f(k) > \\ &> 2 \left(\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \dots + \frac{x_{k^2}}{k} \right) - 3 \left(\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots + \frac{x_{k^2}}{k^2} \right). \end{aligned}$$

Az x_i értékeket úgy választottuk, hogy a különbség első tagja éppen 2 legyen. Felhasználva még, hogy

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < 1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) < 2,$$

kapjuk, hogy $A > 2 - 6 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right)^{-1}$. Ez utóbbi érték pedig minden 2-nél kisebb számnál nagyobb lesz, ha k -t megfelelően választjuk, hiszen a természetes számok reciprokából képzett $1 + 1/2 + \dots + 1/k$ összegek sorozata felülről nem korlátos.

A feladat szövege nem engedi meg, hogy az x_i számok között a 0 is előforduljon. Olvasóinkra bízunk annak meg-gondolását, hogyan módosítható bizonyításunk, hogy ennek a többletkövetelménynek is eleget tegyen.