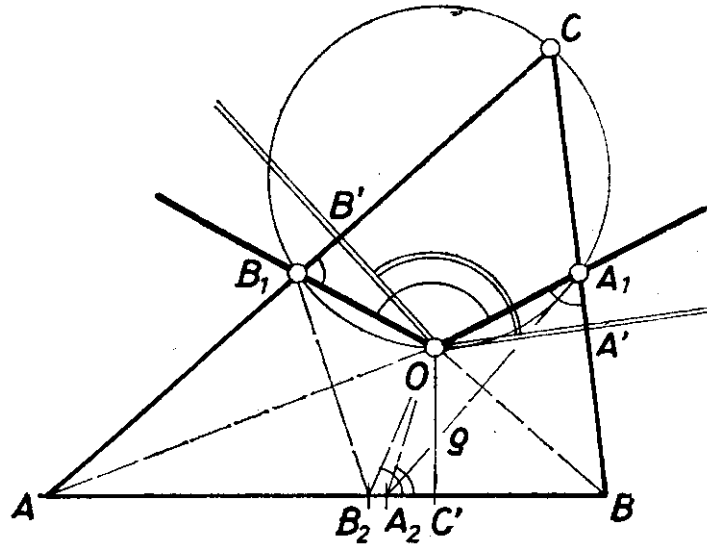


I. megoldás. A vizsgálandó B_1OA_1 szög a háromszög B_1A_1 középvonalának O -ból vett látószöge, és O mindig a B_1A_1 egyenesnek C -t nem tartalmazó partján van, hiszen O -nak az AB oldaltól való ϱ távolsága – a beírt kör sugara – nyilván kisebb, mint a C csúcsához tartozó magasság fele.



A követelmény jobb oldala egyenlő $180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \gamma$ -val.

Ekkora szöget zárnak be egymással az O -ból a körnek a CA és CB oldalon levő B' , ill. A' érintkezési pontjaihoz húzott félegyenesek is, hiszen a $CB'OA'$ négyszögnek két szöge derékszög. Eszerint a B_1OA_1 szögvonal (ti. az egymáshoz képest rögzített OA_1 , OB_1 félegyenes-pár) vagy azonos a $B'OA'$ szögvonallal vagy ahhoz képest O körül el van fordulva.

Azonosságuk esetében az eredeti háromszög szabályos, hiszen O egyszerre mind a CA , CB oldalak felező merőlegeiseinek is közös pontja, tehát $CA = CB = AB$.

Ha viszont $CA \neq AB$, akkor $CA \neq CB$, különben a háromszög egyenlő szárú lenne, A_1 és B_1 , valamint A' és B' tükrös pontpár lenne a háromszög CO szimmetriatengelyére és nem teljesülhetne a jelzett elfordult helyzet. Elég a $CA > CB$ nagyságviszony mellett keresnünk a követelmény teljesülését. Ekkor egyszerre mind $CB_1 > CA_1$, pontosabban $CB_1 > CB' = CA' > CA_1$.

Az $A_1OB_1 = A'OB'$ egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha a két tartomány nem közös részei egyenlők: $B_1OB' = A_1OA'$. Ekkor az OB' és OA' sugarakra támaszkodó derékszögű háromszögek egybevágók, tehát $B_1B' = A_1A'$, és folytatólag a kör érintőszakaszainak egyenlősége alapján

$$\begin{aligned} CB_1 + CA_1 &= \frac{a+b}{2} = (CB' + CA') + (B'B_1 - A'A_1) = (CA - AB') + (CB - BA') = \\ &= b + a - (AC' + BC') = a + b - c, \end{aligned}$$

vagyis

$$(1) \quad c = \frac{a+b}{2}, \quad AB = \frac{CA + CB}{2}.$$

Ez a feltétel nemcsak szükséges, hanem elegendő is, hiszen a gondolatmenet megfordítható. Tehát a keresett feltétel: a háromszög oldalai számtani sorozatot alkossanak úgy, hogy a nagyságra nézve középső oldal AB .

Természetesen odaértendő, hogy a háromszög létezzék, így adott $AB = c$ mellett az a, b oldalpárra

$$\frac{c}{2} < b \leq c, \quad a = 2c - b.$$

Megjegyzés. Érdekes átvinni a talált feltételt a háromszög szögeire. A sinustétel alapján (1) ekvivalens sorra az alábbiakkal:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \gamma = 2 \sin(\alpha + \beta), \\ 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} &= 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \neq 0 \right), \\ \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} &= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

II. megoldás. A feladat követelményének az I. megoldás szerinti

$$B_1OA_1\angle = 180^\circ - B_1CA_1\angle$$

alakja azt kívánja, hogy CB_1OA_1 húrnégyszög legyen, tehát

$$OB_1C\angle = 180^\circ - OA_1C\angle = OA_1B\angle.$$

Tükrözzük A_1 -et OB -re; B_1 -et OA -ra. Az A_2 , ill. B_2 kép nyilván az AB egyenesen keletkezik, és $OA_2B\angle = OA_1B\angle$ illetve $OB_2B\angle = OB_1C\angle$, tehát az előbbi egyenlőség alapján A_2 -nek és B_2 -nek egybe kell esnie. Így pedig

$$(2) \quad \underline{AB} = AA_2 + A_2B = AB_1 + A_B = \frac{AC}{2} + \frac{BC}{2},$$

szükséges tehát, hogy AB számtani közepe legyen a másik két oldalnak. Fordítva, ha egy háromszögben teljesül (2), akkor legyen A_1 -nek BO -ra való tükrösképe X . Ekkor X és B_1 egymás képei AO -ra, hiszen $AX = AB - BX = AC/2$. Így pedig

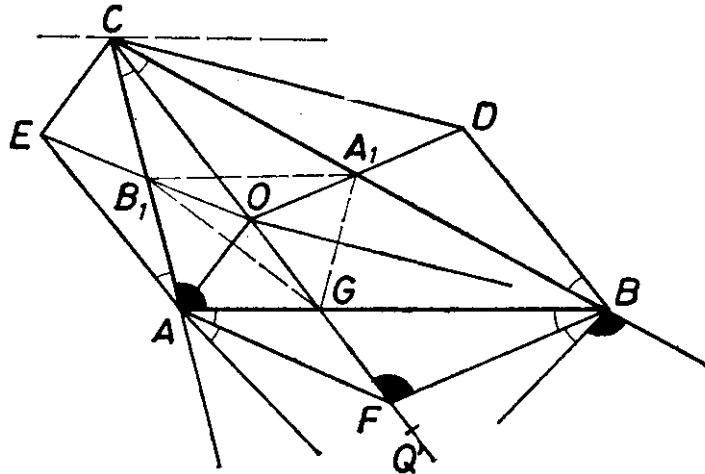
$$OB_1C\angle = OXB\angle = OA_1B\angle = 180^\circ - OA_1C\angle,$$

vagyis OA_1CB_1 húrnégyszög, és

$$B_1OA_1\angle = 180^\circ - B_1CA_1\angle = CAB\angle + CBA\angle,$$

ahogy a feladat kívánja. Tehát a (2) feltétel elegendő is.

III. megoldás. Legyen ABC tetszőleges háromszög, és a beírt körének a középpontja O . Tükrözzük O -t a BC , AC oldalak felezőpontjára, és a kapott pontokat jelöljük D -vel, E -vel.



Mérjük fel az AB szakasz végpontjaiban kifelé a C -nél levő szög felét, és az új szárak metszéspontját jelöljük F -fel. Így az ABF háromszög egyenlő szárú lesz, és ha F körül az A -t alkalmas szöggel elforgatjuk, akkor az B -be jut. Tükrözzük az AB egyenest az AF , BF egyenesekre. Ezek az új egyenesek az AB egyenessel együtt úgy vágják három részre az AC , BC egyenesnek a háromszöget tartalmazó oldalán levő 180° -os szögeket, hogy a három darab A -ban és B -ben is az ABC háromszög három szögével egyenlő. Mivel a C -nél levő szög megfelelője mindkét esetben közepén van, és a másik kettő ciklikus sorrendjét az F körüli forgatás egymásba viszi, ez a forgatás az AC egyenest a BC egyenesbe viszi. Emiatt F egyenlő távol van ettől a két egyenestől, tehát rajta van a háromszög C -nél levő szögét felező CO egyenesen. Ez az egyenes az ABF háromszög F -nél levő szögét éppen két akkora darabra vágja, mint az ABC háromszög A -nál, B -nél levő szögei, mert például az ABC és a BCF háromszögek B -nél, C -nél levő szögeinek az összege egyenlő, és emiatt az A -nál, illetve F -nél levő szögeik is egyenlők.

F -ből tehát az AB szakasz épp akkora szög alatt látszik, mint a feladat szerinti háromszögben O -ból az A_1B_1 szakasz. Ez utóbbinak nálunk a DOE szög felel meg, hiszen A_1 az OD , B_1 az OE szakasz felezőpontja. Mivel a beírt kör érinti az AB egyenest, de nem metszi a C -n át AB -vel párhuzamosan húzott egyenest, így O az A_1B_1 egyenesnek az AB -t tartalmazó oldalán van. Ha tehát C az AB egyenes „fölött” van, akkor O a DE egyenes „alatt” van, és ugyancsak az AB egyenes „alatt” van az F pont.

Azt kell tehát megmondanunk, hogy mi annak a feltétele, hogy a DOE és BFA szögek egyenlőek legyenek. Toljuk el a DOE háromszöget a DB szakasz mentén. Amikor D a B -be jut, akkor E az A -ba kerül, hiszen az $ABDE$ négyszög paralelogramma. Vigye ez az eltolás O -t Q -ba. Ez a Q ugyanúgy az AB egyenes alatt a CO egyenesen lesz, mint F , hiszen a CO egyenes párhuzamos az eltolás irányával. Mivel az AB egyenes alatt a CO egyenesen mozogva, az AB szakaszt monoton változó szög alatt látjuk, a feladatban mondott egyenlőség szükséges és elegendő feltétele, hogy Q azonos legyen F -fel. Ez pedig azzal ekvivalens, hogy O felezze a CF szakaszt, és OE az AF -fel, OD a BF -fel legyen

párhuzamos. Ekkor viszont a CO szögfelezőt az AO , BO szögfelezőkre tükrözve épp az OE , OD egyeneseket kapjuk, és ez a tükrözés a B_1 , A_1 pontokat a CO szögfelező AB -n levő G pontjába viszi. Vagyis az AB szakasz hossza egyenlő az AB_1 , A_1B szakaszok hosszának összegével, ami nem más, mint az AC , BC szakaszok hosszának a számtani közepe.

Megjegyzés. Látószögekről beszéltünk, de annak érdekében, hogy a megoldás a lehető legelemibb (legkevesebb ismert összefüggést felhasználó) legyen, nem használtuk a róluk szóló nevezetes tételt. Ez természetesen rövidítené a megoldás indítását. A látószögek felhasznált monotonitása tulajdonképpen közvetlenebbül látható, ha O -t toljuk F -be, és a rögzített F -ből nézzük a DB , EA síneken futó DE szakaszt; csak az egyszerűség kedvéért választottuk a fordított utat.