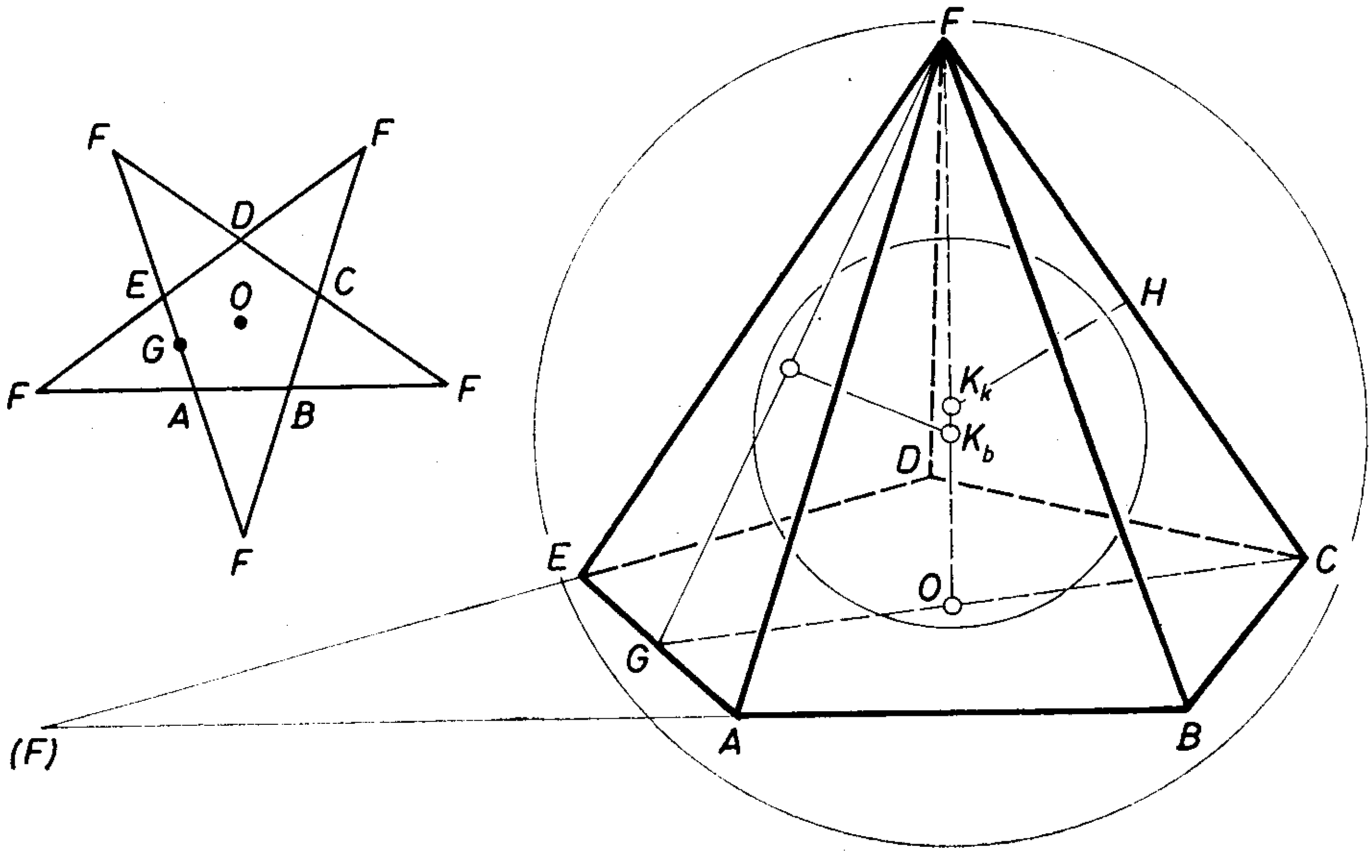
**I. megoldás.** Jelöljük az alaplap (szabályos ötszög) csúcsait rendre $A$, $B$, $C$, $D$, $E$-vel, a gúla hatodik csúcsát $F$ fel. Mivel az oldallapok leforgatásával szabályos csillagötszög keletkezik, azért $F$-nek az $AE$ él körüli leforgatott helyzete az $AB$ és $ED$ oldalegyenesek metszéspontjába esik (1. ábra).




*1. ábra*

E szerint az oldallapok olyan egyenlő szárú háromszögek, amelyekben az alapon levő szög 72°, és az oldalélek hossza

$$AF = \frac{AE/2}{\cos FAE\sphericalangle} = \frac{1}{2\cos 72^\circ} = \frac{1}{2\sin 18^\circ} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} (= 1,618 \ \text{ egység}).$$

Jelöljük az alaplap középpontját $O$-val – ez a magasság talppontja –, az $AE$ él felezőpontját $G$-vel. A gúla előírt szabályosságából következik, hogy mindkét gömb középpontja az $FO$ magasságvonalon (forgási szimmetriatengelyen) lesz, továbbá a beírt gömb az alaplapot $O$-ban érinti, az $AEF$ lapot pedig a $GF$ oldalmagasság egy pontjában.

Legyen még a beírt gömb középpontja $K_b$, és sugara $\varrho$, így $KG_b$ felezi az $FGO\sphericalangle = \gamma$ szöget, és

$$\varrho = OK_b = GO \ \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = GO\sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}}.$$

Itt ismert goniometriai összefüggések alapján, valamint felhasználva 18°-nak és többszöröseinek a szabályos ötszögből kiszámítható szögfüggvényeit, egyrészt

$$GO = AG \ \mathrm{tg}\ 54^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}},$$

másrészt $\cos\gamma = GO/GF$, így a gyökjel alatti kifejezés:

$$\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma} = \frac{GF-GO}{GF+GO} = \frac{GA(\ \mathrm{tg}\ 72^\circ - \mathrm{tg}\ 54^\circ)}{GA(\ \mathrm{tg}\ 72^\circ + \mathrm{tg}\ 54^\circ)} = \frac{\sin 18^\circ}{\sin\ 3\cdot 18^\circ} = \frac{1}{3-4\ \sin^2 18^\circ}$$
$$= \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Ezekkel

$$\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{40}}\ (= 0,4253 \text{ egység}).$$

A körülírt gömb $R$ sugarának számításához a $COF$ háromszöget használjuk. Jelöljük a gömb középpontját $K_k$-val, $FC$ felezőpontját $H$-val. Az $FK_kH$ és $FCO$ derékszögű háromszögek hasonlóságából

$$\frac{FH}{R} = \frac{FO}{FC}, \qquad R = \frac{FC^2}{2 \cdot FO} = \frac{FC^2}{2\sqrt{FC^2 - OC^2}}.$$

Itt

$$OC = OA = \frac{AG}{\cos 54^\circ} = \frac{1}{2 \sin 36^\circ} = \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}.$$

A nevezőbeli négyzetgyökjel alatt

$$FC^2 - OC^2 = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^2 - \frac{5 + \sqrt{5}}{10} = \frac{1}{5 - 2\sqrt{5}}$$

áll, végeredményben tehát

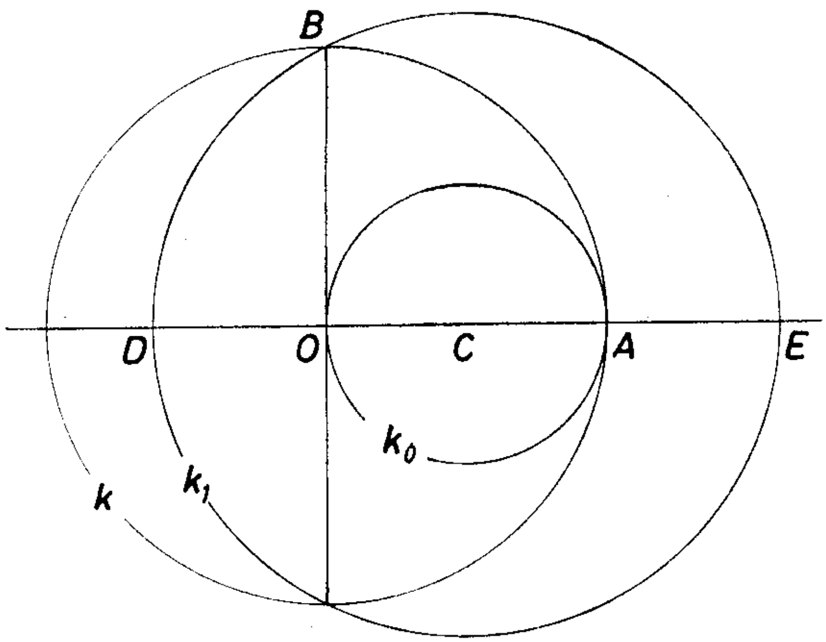
$$R = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \ \ (= 0,9511 \text{ egység}).$$

*Megjegyzés.* Két észrevételt teszünk számításaink alapján. Egyrészt $R/\varrho = \sqrt{5}$, másrészt

$$FO = \frac{FC^2}{2R} = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} = R + \varrho,$$

tehát $K_b$ és $K_k$ egybeesik.

**II. megoldás** (vázlat). Induljunk ki a szabályos ötszög eukleidészi szerkesztéséből (2. ábra).




*2. ábra*

Legyenek $OA$ és $OB$ a $k$ kör merőleges sugarai, $C$ az $OA$ szakasz felezőpontja, és jelöljük a $C$ középpontú, $A$-n, illetve $B$-n átmenő köröket $k_0$-lal, illetve $k_1$-gyel, $k_1$-nek az $OA$ egyenesen levő pontjait $D$-vel, $E$-vel ($D$ legyen közülük $O$-hoz közelebb). Az $EBD$ derékszögű háromszögben $BO$ a $DO$, $OE = OA + AE = OB + DO$ szakaszok mértani közepe, emiatt

$$DO : OB = OB : (OB + DO),$$

vagyis $DO$ és $OB$ aránya megegyezik a szabályos tízszög oldalainak és a köré írt kör sugarának az arányával. Így $DO$ valóban a $k$-ba írt szabályos tízszög oldala, és

$$BE^2 = DE \cdot OE$$

miatt $BE$ a $k$-ba írt szabályos ötszög átlója, végül $DB : BE = DO : OB$ miatt $DB$ a $k$-ba írt szabályos ötszög oldala.

Forgassuk meg ezt az ábrát a $DE$ egyenes körül, és jelöljük a $k_0$, $k_1$ körök forgatásából keletkező gömböket $G_0$ lal, $G_1$-gyel. $G_1$-ből a $BO$ forgatásából származó sík $k$-val egybevágó kört metsz ki, tehát az ebbe írt szabályos ötszög oldalai $BD$-vel egyenlőek, átlói pedig $BE$-vel. így ez az ötszög $E$-vel együtt épp a feladatban szereplő gúlát határozza meg, ha $BD$ egységnyi.

A kapott gúlának $G_1$ természetesen a köré írt gömbje, megmutatjuk, hogy $G_0$ a beírt gömb. A konstrukció miatt $G_0$ érinti az alaplapot, melyben például a $B$ csúcsból induló átlók az oldallapokkal egybevágó háromszögeket zárnak közre. Mivel $BC = EC$, a $G_0$-hoz $E$-ből húzott érintősíkok is $k$-val egybevágó köröket metszenek ki $G_1$-ből, tehát a gúla oldallapjai valóban érintik $G_0$-t.

Ha $OC = \varrho$, akkor $BC = \varrho\sqrt{5},\ DO = \varrho(\sqrt{5}-1),\ DB^2 = \varrho^2(10-2\sqrt{5})$. Ha tehát $DB = 1$, akkor

$$\varrho^2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{5-\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{40}.$$

Így a gúlába írt gömb sugara $\varrho = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{40}}$ és a gúla köré írt gömb sugara $BC = \varrho\sqrt{5} = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$.