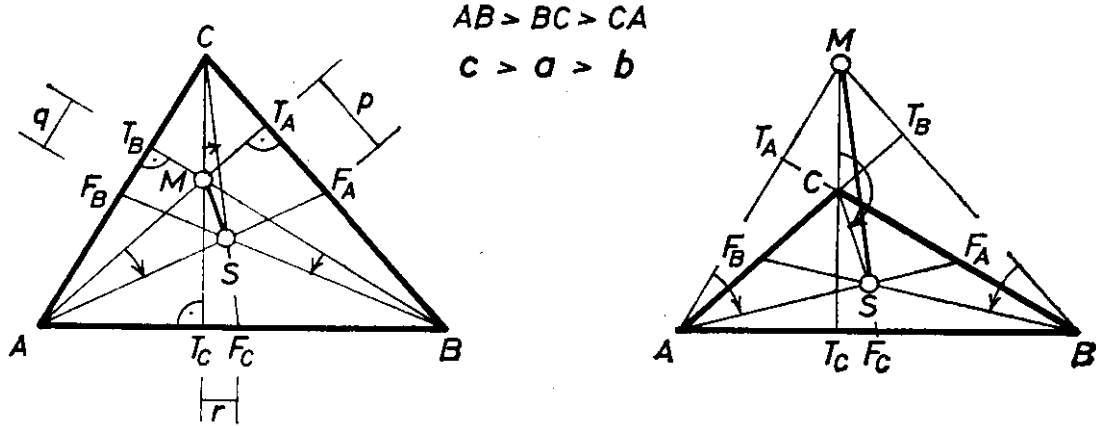


I. megoldás. Zárjuk ki vizsgálatunkból az előre látható rendkívüli eseteket! Derékszögű háromszög esetén, ha $ACB \angle = 90^\circ$, M azonos C -vel, emiatt az MCS látószög nem értelmezhető, tehát az állítás sem. Egyenlő szárú – de nem derékszögű – háromszög esetén viszont az állítás nyilvánvaló, hiszen $CA = CB$ mellett az MCS látószög 0° vagy 180° , tangense mindenképpen 0, míg a szimmetria alapján a másik két látószög egyenlő.

Válasszuk most már úgy a háromszög betűzését, hogy $AB > BC > CA$, hozzáátéve, hogy $AB^2 \neq BC^2 + CA^2$, legyen továbbá az oldalak felezőpontja a fenti rendben F_C , F_A , F_B , és az oldalakon levő magasságtalppont T_C , T_A , T_B (1 – 2. ábra).



Alkalmazzuk Pitagorasz tételét a közös befogóval bíró AT_AB és AT_AC derékszögű háromszögekre:

$$AT_A^2 = AB^2 - BT_A^2 = AC^2 - CT_A^2, \quad AB^2 - AC^2 = (BT_A + T_AC)(BT_A - CT_A).$$

Ha T_A a BC szakaszon van – vagyis ha $BCA \angle < 90^\circ$, – akkor az első zárójel BC , a második pedig

$$(BF_A + F_AT_A) - (CF_A - F_AT_A) = 2 \cdot F_AT_A,$$

hiszen F_A felezi BC -t. Ha pedig $BCA \angle > 90^\circ$, vagyis T_A a BC oldal C -n túli meghosszabbításán keletkezik, akkor a második zárójel adja BC -t, az első pedig $2 \cdot F_AT_A$ -t, mert T_AC helyére az előbbi kifejezésének (-1) -szerese lép. Mindkét változatban

$$F_AT_A = \frac{AB^2 - AC^2}{2 \cdot BC} = \frac{c^2 - b^2}{2a}$$

és

$$\operatorname{tg} F_AT_A \angle = \operatorname{tg} SAM \angle = \frac{F_AT_A}{AT_A} = \frac{c^2 - b^2}{2am_a} = \frac{c^2 - b^2}{4t},$$

ahol t a háromszög területe.

Hasonlóan mindkét változatban

$$\operatorname{tg} F_BBT_B \angle = \frac{c^2 - a^2}{4t},$$

végül a C szög milyenségétől függetlenül

$$\operatorname{tg} F_CCT_C \angle = \frac{a^2 - b^2}{4t},$$

és már pusztán ránézésből kimondható, hogy az állítás helyes, és pontosabban így fogalmazható: a nagyságra nézve középső szög csúcsából vett látószög tangense egyenlő a másik kettő összegével.

Megjegyzés. A szemlélet szerint így is igaz az állítás: az MS egyenes 2 partján + , ill. – előjellel ellátva a látószögek tangensét, a három tangens összege 0.

II. megoldás. Jelöljük a háromszög csúcsait A -val, B -vel, C -vel – az óramutató járásával ellentétes irányban járva be a csúcsokat –, és irányítsuk ennek megfelelően az oldalakat is, vagyis AB fusson A -tól B felé, BC B -től C felé és CA a C -től A -ba. Mivel az A csúcs T_A vetülete a BC oldalon pontosan akkor esik B -nek C felőli oldalára, ha a B -nél levő β szög hegyesszög, a választott irányítás szerint B -től T_A -ig mindig $c \cos \beta$ előjeles út visz, ahol az előjel az irányításhoz való viszonyt fejezi ki. Így BC felezőpontjától, F_A -tól T_A -ig $\left(c \cos \beta - \frac{a}{2}\right)$ előjeles út visz. Ugyanezt az utat C -ből indulva is kimérhetjük, de mivel B és C szerepének a felcserélése az irányítást megváltoztatja, az eredményt most $\left(\frac{a}{2} - b \cos \gamma\right)$. Ha A -nak BC -től mért m_a távolságát is kétféleképpen írjuk fel ($c \sin \beta$)-nak, illetve ($b \sin \gamma$)-nak, az A -beli α_1 látószög tangensére rögtön két, egymással egyenlő alakot kapunk:

$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{ctg} \beta - \frac{a}{2m_a} = \frac{a}{2m_a} - \operatorname{ctg} \gamma.$$

A kapott (1) összefüggés $\operatorname{tg} \alpha_1$ értékét is előjellel ellátva adja, ahol az előjel aszerint pozitív vagy negatív, hogy az $F_A AT_A$ forgásszög iránya pozitív-e vagy sem. Hasonlóan kapjuk a B - és C -beli β_1 , illetve γ_1 szögre, hogy

$$(2) \quad \operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{ctg} \gamma - \frac{b}{2m_b} = \frac{b}{2m_b} - \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} \gamma_1 = \operatorname{ctg} \alpha - \frac{c}{2m_c} = \frac{c}{2m_c} - \operatorname{ctg} \beta.$$

E három összefüggést összeadva kapjuk, hogy a három tangens összege 0, hiszen az első három kifejezés összege épp a második három összegének (-1) -szerese. Márpedig ha három szám összege 0, akkor közülük kettő abszolút értékének összege egyenlő a harmadik abszolút értékével. Így a feladat állítását beláttuk.

Visszagondolva az I. megoldásra, csodálkozhatunk, miért nem okozott bajt a derékszögű háromszög. Ennek az az oka, hogy mi egyértelműen meghatározott szögekkel helyettesítettük a feladatban szereplő szögeket, amelyekkel azok valóban helyettesíthetők, mihelyt léteznek.