

Igazoljuk, hogy az alábbi egyenlőtlenség teljesül minden x, y, z valós számra, ahol A, B és C egy háromszög szögei:

$$(1) \quad \left(\frac{x+y+z}{2} \right)^2 \geq xy \sin^2 A + yz \sin^2 B + zx \sin^2 C.$$

I. megoldás. A négyzetre emelés elvégzése, és az

$$1 - 2 \sin^2 \omega = \cos 2\omega$$

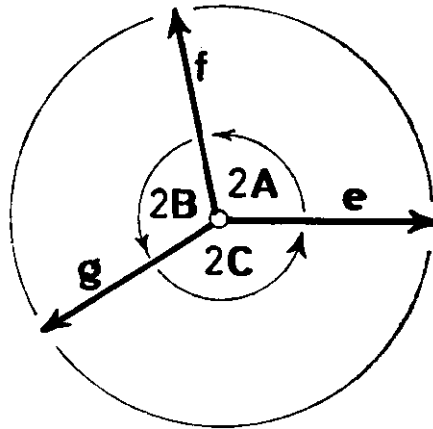
összefüggés felhasználása után (1)-ből a vele ekvivalens

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \cos 2A + 2yz \cos 2B + 2zx \cos 2C \geq 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel A, B, C egy háromszög szögei, $2A + 2B + 2C = 360^\circ$. Legyen $\mathbf{e}$ a síkon tetszőleges irányú, egységnyi nagyságú vektor, $\mathbf{e}$ -t $2A$ szöggel elforgatva kapjuk $\mathbf{f}$ -et, ebből $2B$ szöggel való forgatással kapjuk $\mathbf{g}$ -t. Mivel $2A + 2B + 2C = 360^\circ$, $\mathbf{g}$ -t újabb, $2C$ szöggel való forgatás visszaviszi $\mathbf{e}$ -be. Megmutatjuk, hogy (2) bal oldalán az

$$\mathbf{s} = x\mathbf{e} + y\mathbf{f} + z\mathbf{g}$$

vektor abszolút értékének a négyzete áll, ezzel természetesen (2)-t, és vele együtt (1)-et is bebizonyítjuk.



Válasszuk a koordináta-rendszer origójának a vektorok közös kezdőpontját, és az x tengely pozitív irányának $\mathbf{e}$ irányát. Ekkor $\mathbf{s}$ abszcisszája

$$s_1 = x + y \cos 2A + z \cos 2C,$$

ordinátája pedig

$$s_2 = y \sin 2A - z \sin 2C.$$

E kettő négyzetösszege

$$|s|^2 = s_1^2 + s_2^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x(y \cos 2A + z \cos 2C) + 2yz(\cos 2A \cos 2C - \sin 2A \sin 2C),$$

ami valóban azonos a (2) bal oldalán álló kifejezéssel, hiszen $\cos 2A \cos 2C - \sin 2A \sin 2C = \cos(2A + 2C) = \cos 2B$.

Károlyi Gyula (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. A bizonyítandó egyenlőtlenséget (2) alapján a következő formába írhatjuk:

$$x^2 + 2x(y \cos 2A + z \cos 2C) + (y^2 + z^2 + 2yz \cos 2B) \geq 0.$$

Ismeretes, hogy az $x^2 + 2bx + c$ másodfokú polinom értéke pontosan akkor nem negatív x minden értékére, ha diszkriminánsa nem pozitív, azaz ha $4b^2 - 4c \leq 0$. Esetünkben ez a helyzet, ugyanis $\cos 2B = \cos 2A \cos 2C - \sin 2A \sin 2C$ alapján

$$\begin{aligned} & (y \cos 2A + z \cos 2C)^2 - (y^2 + z^2 + 2yz \cos 2B) = \\ & = -y^2 \sin^2 2A - 2yz(\cos 2B - \cos 2A \cos 2C) - z^2 \sin^2 2C = \\ & = -(y \sin 2A - z \sin 2C)^2, \end{aligned}$$

ahogyan állítottuk.

Megjegyzés. Az I. megoldásban kapott összefüggés a koszinusz-tétel általánosítása. Hasonlóan látható be, hogy ha $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ a sík tetszőleges vektorai, akkor

$$(3) \quad \left| \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i \right|^2 = \sum_{i=1}^k |\mathbf{v}_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k |\mathbf{v}_i| |\mathbf{v}_j| \cos \omega_{ij},$$

ahol ω_{ij} a $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ vektorok közti szög. Akik tudják, hogy a $|\mathbf{v}_i| |\mathbf{v}_j| \cos \omega_{ij}$ mennyiséget a $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ vektorok skaláris szorzatának hívják, és azt is tudják, hogy ez a szorzás is kommutatív, és az összeadásra nézve disztributív, ennek alapján is beláthatják a (3) összefüggést. Sokan a skaláris szorzás tulajdonságai alapján igazolták a feladat állítását, ez a megoldás azonban csak formálisan tér el a fenti I. megoldástól. A lényeges ötlet közös a két megoldásban, és ez az, hogy (2) bal oldalán „teljes négyzet” áll. Mint láttuk, ennek a felismerése nélkül is bizonyítható (2). Általában kérdezhető, hogy mi annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy a

$$(4) \quad c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + 2c_{12}xy + 2c_{23}yz + 2c_{13}xz \geq 0$$

egyenlőtlenség tetszőleges x, y, z valós számra teljesüljön. Nyilván szükséges, hogy az

$$(5) \quad c_{11} \geq 0, \quad c_{22} \geq 0, \quad c_{33} \geq 0, \quad c_{11}c_{22} \geq c_{12}^2, \quad c_{22}c_{33} \geq c_{23}^2, \quad c_{11}c_{33} \geq c_{13}^2$$

egyenlőtlenségek teljesülnek. Ha rajtuk kívül még

$$(6) \quad C_{11}C_{22}C_{33} + C_{12}C_{23}C_{31} + C_{13}C_{21}C_{32} - C_{13}C_{22}C_{31} - C_{12}C_{21}C_{33} - C_{11}C_{23}C_{32} \geq 0$$

is teljesül, akkor ez már elégséges is. Esetünkben (5) triviálisan teljesül, (6) belátásához azonban elég sok trigonometrikus átalakításra volna szükség. Aki ismeri a determinánsokat, észreveheti, hogy (6) bal oldalán épp a c_{ij} elemű determináns értéke áll, és a (4) egyenlőtlenség azt jelenti, hogy a determináns által generált kvadratikus alak pozitív szemidefinit.