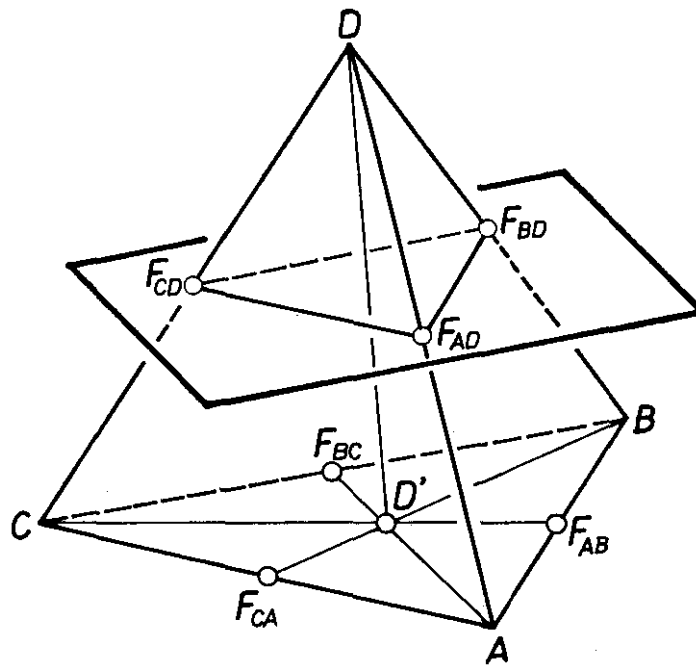


Problémánk az F. 2258. feladat¹ első része folytatásának tekinthető. Annak a feladatnak az állítása azokról a részekről szólt, amelyekre az $ABCD$ szabályos tetraéder köré írt gömb felülete feloszlik, ha metsszük a magasságvonalait (egyben súlyvonalait) merőlegesen felező síkokkal. A részek felszínére vonatkozó állítás bizonyítása céljára le kellett írunk a részeket, és most azt a leírást folytathatjuk.

Az ottani leírást így kezdtük: mindegyik felező merőleges sík úgy is előállítható, hogy az illető magasságvonalhoz tartozó tetraéderlap síkját tükrözzük a körülírt gömb O középpontjára, ugyanis O – egyben a test súlypontja – mindegyik magasságnak a laphoz közelebbi negyedelő pontjában van. Ezért tovább a gömbfelületnek a lapok síkjai által létesített feldarabolását tekintettük. Az így keletkezett felosztás minden egyes felületi része egy olyan résznek az O -ra való tükörképe, amely az eredeti elgondolás szerint keletkezett.

Mostani feladatunkban az oktaéder 8 lapsíkja közül 4 a kiindulási $ABCD$ tetraédernek is lapsíkja, hiszen 3 – 3 tetraéderél (és felezőpontjaik is) 1 – 1 síkban van, a további 4 lapsík pedig rendre azonos a felező merőleges síkokkal, mert a tetraédernek pl. a DD' tengely körüli forgási szimmetriája alapján – ahol a D' magasságtalppont egyszersmind az ABC szabályos háromszög-lap centruma – a DD' szakasz felező merőleges síkja felezi a DA , DB , DC éleket (1. ábra).



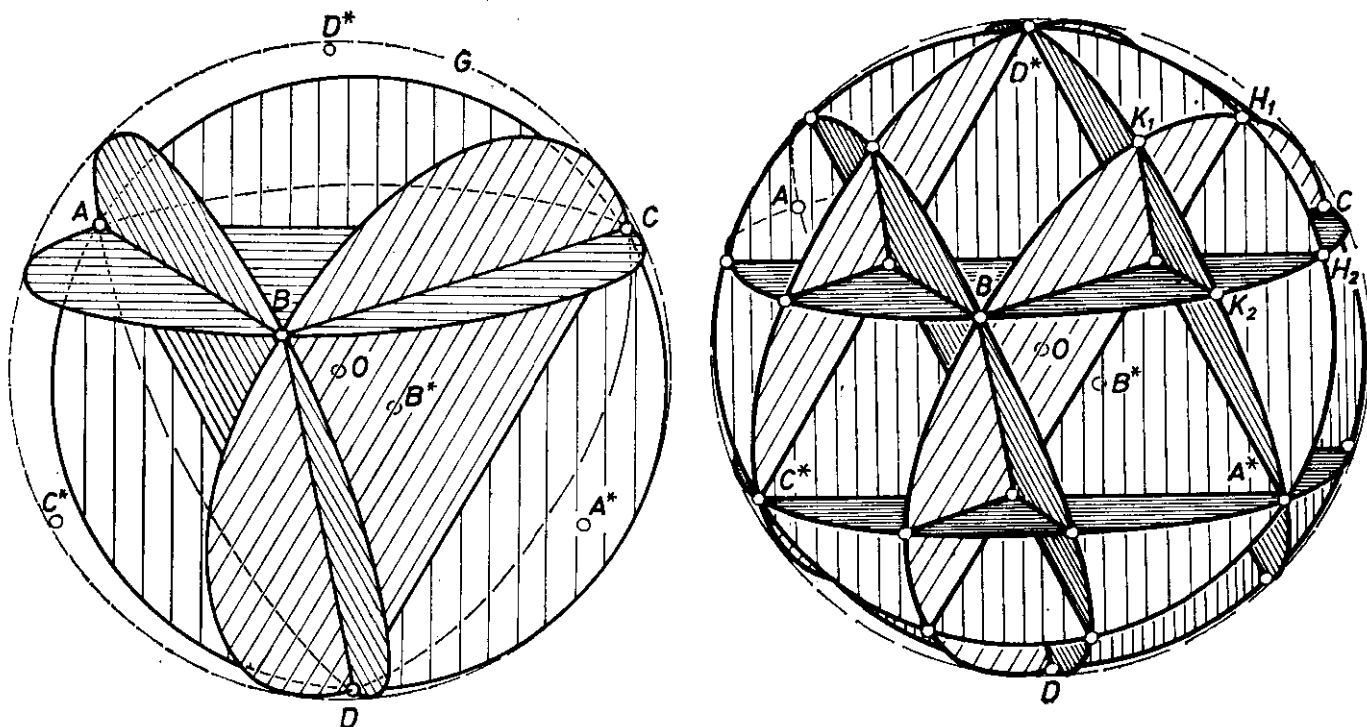
1. ábra

A végrehajtás szempontjából tehát célszerűbb lesz így kimondani új feladatunkat: a gömböt egyrészt az $ABCD$ tetraéder 4 lapsíkjával metsszük, másrészt az O -ra vonatkozó tükörképének, az $A^*B^*C^*D^*$ szabályos tetraédernek 4 lapsíkjával.

Első 4 körünk révén az idézett megoldás szerint 2-féle gömbfelületi rész keletkezett: kétcsúcsúak és háromcsúcsúak. (Nem volna helyes gömbháromszögnek nevezni az utóbbit, mert ez az olyan gömbfelületi részek bevelt, szokásos neve, amelyeket 3 *főkör*nek 1 – 1 íve határol.) Kétcsúcsú rész 6 keletkezett a tetraéder 6 élének megfelelően, az O -ból induló és az él 1 – 1 pontján áthaladó félegyenesek 1 – 1 ilyen részt metszve lépnek ki a gömbből, háromcsúcsú rész pedig 4, a lapoknak megfelelően.

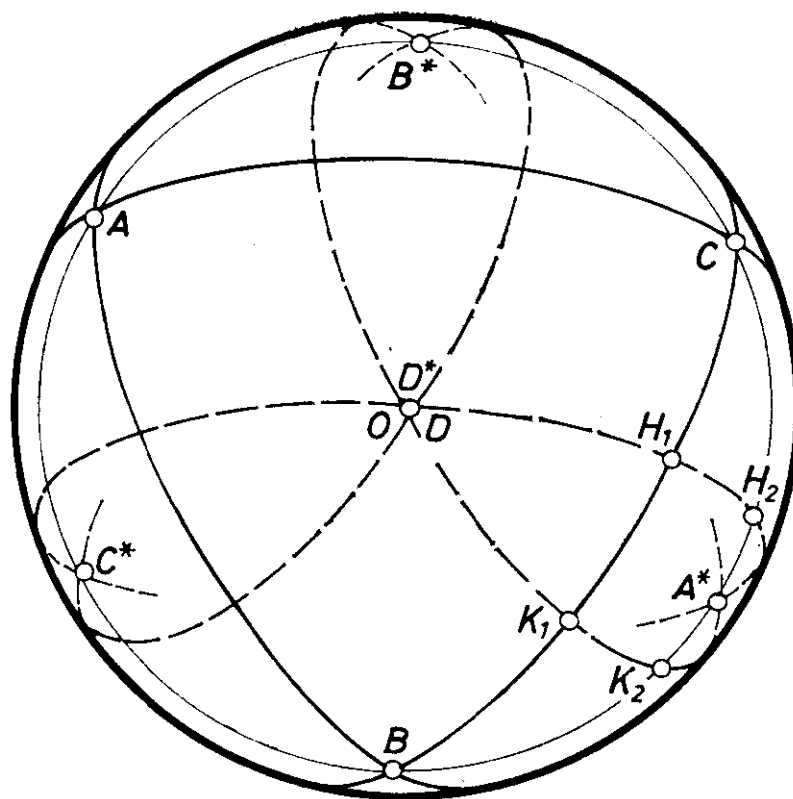
Tekintsük a 2. ábrabeli felosztást fölülről, az ABC síkra merőlegesen ránézve; ez a vetületszerű kép egyelőre célszerűbb, mint egy távlati rajz.

¹Lásd a megoldást K. M. L. 61. (1980) 128-130. oldal.



2. ábra

A 3. ábra vastag vonalai az A, B, C csúcsokon átmenő kör és a DAB, DBC, DCA köröknek a felső félgömbön levő, felénk eső ívei. Az utóbbi 3 kör teljes képei ellipszisek, átmennek az ábra középpontján, ami D, O és D^* egybeeső képe.



3. ábra

Kiegészítjük a 3. ábrát a 4 új kör képeivel. Az $A^*B^*C^*$ kört együtt látjuk az ABC körrel. A további 3 kör képei a 3 ellipszisnek a centrumra való tükröképei, átmennek a gömb legfelső D^* pontjának képén. Látható (felső) ívüket hosszú szaggatású vonallal rajzoltuk. Mindegyik ív 2 ponton lép át az ABC háromcsúcsúból a vele szomszédos kétcsúcsúak

közül 2-be, majd onnan tovább ismét egy 3 csúcúba, pl. a $D^*A^*C^*$ kör D^*A^* íve, H_1, H_2 -n át a BC -be, ill. a DBC -be, és ugyanezekbe a $D^*A^*B^*$ kör D^*A^* íve is K_1, K_2 -n át.

Így az ABC részből 6 új rész keletkezett, de $3 - 3$ nyilván egybevágó, tehát 2-féle, háromcsúcú és négycsúcú. A BC (régi) kétcsúcú szintén háromcsúcúakra és négycsúcúakra oszlott, 2, ill. 1 rész ilyen. A kétféle eredetű háromcsúcúak egybevágók, pl. $D^*H_1K_1$ és CH_1H_2 , hiszen az előbbi a D^*A^* kétcsúcúba is beletartozik. Mondhatjuk egyenlő szárúnak is a háromcsúcúakat, oldalaik tehát 2 „szár” és 1 „alap” (ívek).

A talált kétféle négycsúcú rész viszont nem egybevágó, oldalaik „szárak”, ill. „alapok”, az ABC -belieknek $2 - 2$ szöge 60° körüli érték, a BC -belieké 90° körüli.

Mindezek szerint a felosztásban 3-féle gömbfelületi rész található: 24 db háromcsúcú ($2 \cdot 6$ kétcsúcúból $2 - 2$), 6 db négyzetszerű négycsúcú (oldalai „alapok”), ezek $2 - 2$ kétcsúcúnak közös részei és 12 db rombusz-szerű négycsúcú, $2 - 2$ régi fajta háromcsúcúnak közös részei.