Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-re

$$\frac{|\sin n|}{n}+\frac{|\sin(n+1)|}{n+1}+\ldots+\frac{|\sin 2n|}{2n}>\frac{1}{6}. \tag{1}$$

(A szinusz függvény argumentumát radiánokban mérjük.)

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy

$$|\sin\alpha|+\bigl|\sin(\alpha+1)\bigr|\geq\sin 1 \tag{2}$$

minden α-ra. Valóban, ha $\sin\alpha$ és $\sin(\alpha+1)$ egyező előjelű, akkor (2) bal oldala

$$\bigl|\sin\alpha+\sin(\alpha+1)\bigr|=2\left|\ \sin\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\right|\cos\frac{1}{2}\geq 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2},$$

hiszen valamilyen k egészre α és $\alpha+1$ is a $\bigl[k\pi,(k+1)\pi\bigr]$ zárt intervallumba esik. Ha pedig $\sin\alpha$ és $\sin(\alpha+1)$ különböző előjelű, akkor (2) bal oldalán

$$\bigl|\sin(\alpha+1)-\sin\alpha\bigr|=2\sin\frac{1}{2}\left|\cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\right|\geq 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2},$$

hiszen ekkor $k\pi-1\leq\alpha\leq k\pi$ valamilyen k egészre.

Az (1) egyenlőtlenség bal oldalát csökkentjük, ha a nevezőkben mindenütt $2n$-et írunk, s mivel $(n+1)$ összeadandó szerepel, azért a közös nevezőre hozás után a számlálót $\left[\frac{n+1}{2}\right]\geq\frac{n}{2}$ darab (2) típusú részletösszegre tudjuk bontani. Ezek alapján (1) bal oldala nagyobb, mint

$$\frac{1}{2n}\cdot\frac{n}{2}\cdot\sin 1=\frac{\sin 1}{4}>\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4\sqrt{2}}>\frac{1}{6},$$

és ezt akartuk belátni.