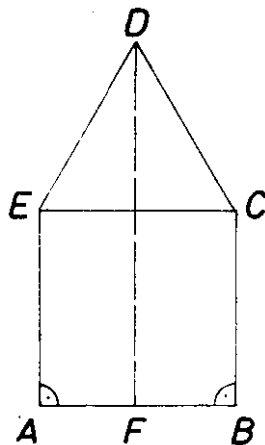
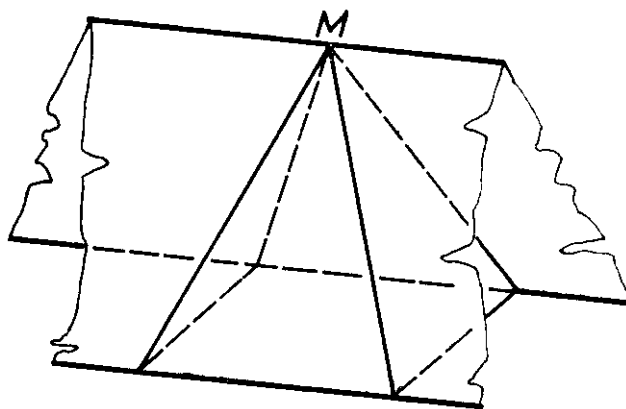


Megoldás. Gúlánknak 5 lapja van, tehát az S metsző sík mindegyik lapját metszi. A test konvex, ezért az $ABCDE$ metszet is konvex. Legyenek a metszet derékszögű csúcsai A és B , így AE oldala párhuzamos és egyenlő BC -vel, az ötszögről levágható az $ABCE$ négyzet és marad a CED egyenlő oldalú háromszög. Eszerint az AB oldal F felezőpontját D -vel összekötő egyenes szimmetriatengelye a metszetnek (1. ábra).



1. ábra

BC és EA párhuzamossága alapján S párhuzamos azzal az e egyenessel, amelyben a BC -t és EA -t tartalmazó lapok síkjai egymást metszik. Tisztázzuk e -nek a gúlával való kapcsolatát! A gúla 5 lapsíkja közül 10-féleképpen választható ki 2, a 10 metszésvonal közül 4 alapél, 4 oldalél, végül a 2 – 2 nem szomszédos oldallapsík közös egyenesei a gúla négyélű M csúcsán átmenő, az alapsíkkal párhuzamos egyenesek (mert az oldallapsíkok egyenlő szöggel hajlanak az alapsíkhhoz). A 10 metszésvonal e három csoportjában az egyenesek ekvivalensek egymással a gúla szimmetriái alapján (2. ábra).

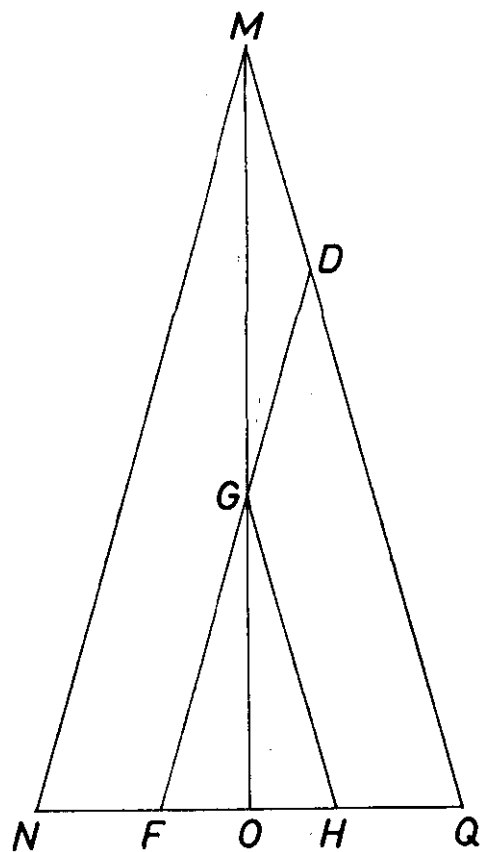
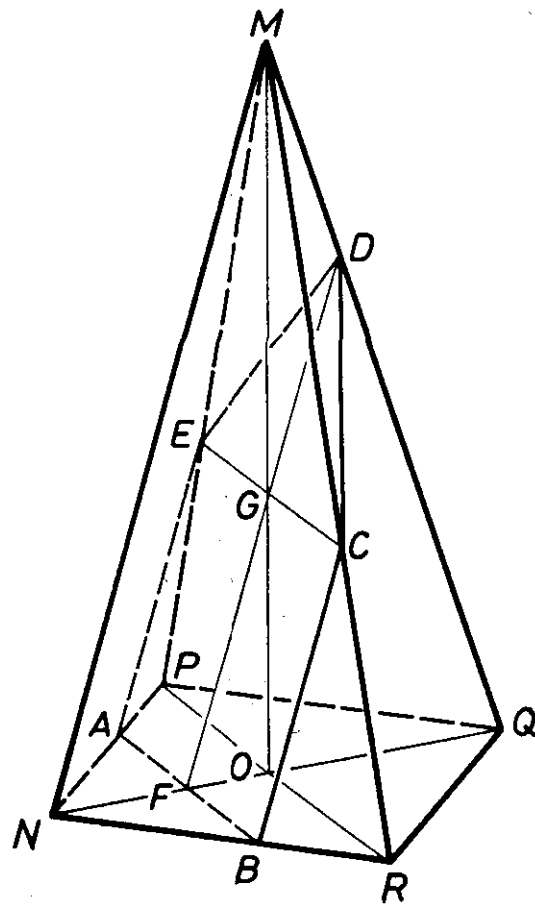


2. ábra

Ellentmondásra vezet annak föltevése, hogy S az utóbbi 2 egyenes valamelyikével volna párhuzamos. Ugyanis ekkor BC és EA párhuzamosak volnának egy alapéllal; másrészt egyenlő hosszúak is, emiatt az egyenlő szárú háromszög alakú, egybevágó oldallapokban egyenlő távolságra volnának M -től, tehát S párhuzamos volna az alapsíkkal, holott – mint láttuk – azt is metszenie kell.

Az is lehetetlen, hogy alapél legyen e , mert akkor BC és EA közül az alaplapban fekvő egyenlő volna az alapéllal, az oldallapban fekvő pedig rövidebb volna annál.

Ezek szerint az e egyenes valamelyik oldalél, mondjuk MN (az alapnégyzet csúcsait N, P, Q, R -rel jelölve; és BC, AE mindegyike háromszög alakú lapban van, amelyek egybevágók. Az előbbiekhöz hasonló megfontolással BC és AE az NM éltől is egyenlő távolságra vannak, ezért $NA = NB$, illetve $ME = MC$. Ugyanis A és B csak az alapon lehetnek, hiszen az NMP és NMR oldallapok között az N csúcsnál csak 1 lap van, ahogy az A és B csúcsok közt a metszeten 1 oldal, viszont M -nél 2 lap, ahogy C és E közt 2 oldal. Ezek szerint AB merőleges az alapnégyzet NQ átlójára és S merőleges az NMQ átlós síkmetszetre, amely egyben szimmetriasíkja is a testnek. Továbbá C, D, E rendre az MR, MQ, MP oldaléllal való metszéspontja S -nek (3. ábra).



3. ábra

Mivel S merőleges MNQ -ra, azért párhuzamos PR -rel, és az AB , EC egyenesek is párhuzamosak PR -rel. Az EC szakasz benne van az MPR átlós síkban, és G felezőpontja rajta van a gúla MO magasságán, ahol O az alaplap

centruma. Az $MNPR$ tetraédernek az MN és PR éleivel is párhuzamos S , és S alkalmas megválasztásával annyi tetszőleges gúlában elérhető, hogy $ABCD$ négyzet legyen. Ha ugyanis MN és PR merőlegesek, és S párhuzamos velük, akkor $ABCD$ mindig téglalap, és ez akkor lesz négyzet, ha $NA : AP = MN : PR$. Valóban, az MNP lapon $AE : MN = AP : PN$, a PRN lapon $AB : PR = AN : PN$, tehát

$$\frac{AE}{AB} = \frac{MN}{PR} : \frac{NA}{AP}.$$

Most már csak azt kell biztosítanunk, hogy a CDE háromszög szabályos legyen. Mivel DF ennek is szimmetriatengelye, ehhez elég annyi, hogy $GD : GF = \sqrt{3} : 2$ legyen. Az FDQ . háromszögben messe a G -n át DQ -val párhuzamosan húzott egyenes FQ -t H -ban, akkor $GD : GF = HQ : HF$. Tehát $GD : GF$ akkor egyenlő $(\sqrt{3} : 2)$ -vel, ha $HQ : HO = \sqrt{3} : 1$, hiszen $HF = 2HO$. Mivel pedig $HQ : HO = FN : FO = NA : AP = MN : PR$, ez akkor teljesül; ha $MN = \sqrt{3}$

$$PR = \sqrt{6}, \text{ vagyis } MO = \sqrt{MN^2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{11}{2}} = 2,345.$$