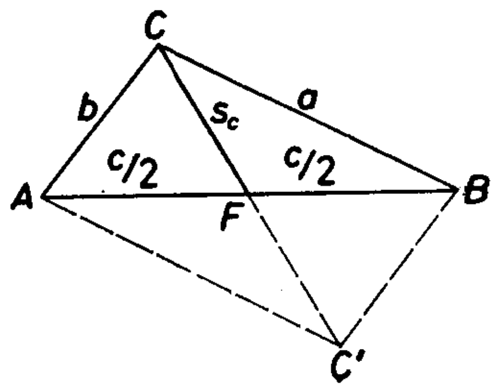
*Jelöljük az $a$, $b$, $c$ oldalú háromszög $c$-hez tartozó súlyvonalának hosszát $s_c$-vel. Bizonyítandó, hogy*

$$\frac{c^2-(a-b)^2}{2(a+b)} \le a+b-2s_c < \frac{c^2+(a-b)^2}{4s_c}. \tag{1}$$

**Megoldás.** A feladat eredeti kitűzésében sajtóhiba volt. Itt a fenti állítást bizonyítjuk. (Az eredetiben a jobb oldali számláló tagjai között + jel állt, és ez az egyenlőtlenség jobb oldali felének bizonyítását még könnyítette. Bemutatjuk egy könnyű számpéldán, milyen torzítást jelent ez. A 34, 56, 78 oldalakkal bíró háromszög esetében $c$-nek 56-ot véve a számláló helyesen 1200, tévesen 5072, vagyis több mint 4-szer akkora.)

Tükrözzük az $ABC$ háromszöget az $AB=c$ oldal $F$ felezőpontjára a $BAC'$ helyzetbe. Így paralelogrammát kapunk, átlói $c$ és $CC'=2s_c$, oldalai $a$ és $b$.




Ismeretes, hogy paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével. Ebből a

$$c^2=2a^2+2b^2-4s_c^2$$

kifejezést a számlálókba helyettesítve, egyszerű átrendezéssel ez adódik:

$$(a+b)^2-4s_c^2=(a+b-2s_c)(a+b+2s_c),$$

vagyis az első tényező azonos a kettős egyenlőtlenség közepén álló kifejezéssel.

Írjuk föl a háromszög-egyenlőtlenséget a $CC'A$ háromszög $CC'$ oldalára:

$$a+b>2s_c \tag{2}$$

Eszerint az (1) közepén álló kifejezés minden valódi háromszögben pozitív. Ezzel osztva (1)-et, elég bizonyítanunk a vele ekvivalens következőt:

$$\frac{(a+b)+2s_c}{(a+b)+(a+b)} \leqq 1 < \frac{(a+b)+2s_c}{2s_c+2s_c}.$$

Ez pedig (2) szerint helyes, és egyenlőség nem állhat fenn, hiszen a bal oldali számláló csökkentéssel állt elő a nevezőjéből, a jobb oldali számláló pedig növeléssel a maga nevezőjéből.