

I. megoldás. Tekintsük a megadott számok közül a legkisebb abszolút értékűt (ha több ilyen volna, akkor ezek egyikét). A többi szám közül az ennél nagyobbakat csökkentjük, a nála kisebbeket pedig növeljük, mindaddig, míg a szomszédos számok távolsága 1-re nem csökken. A feladat feltételei alapján ezt meg szabad tenni, s ezzel a számok abszolút értékét is – egy kivételével – csökkentettük. Mivel kisebb abszolút értékű szám négyzete kisebb, a kapott számok négyzetösszege legfőljebb annyi, mint az eredeti számok négyzetösszege. Jelöljük az új számaink közül a középsőt x -szel, a többiek értéke ekkor $x - 2$, $x - 1$, illetve $x + 1$ és $x + 2$, négyzetösszegük pedig $5x^2 + 10 \geq 10$. Így az eredeti négyzetösszeg nagyobb volt 10-nél, és ezt kellett bizonyítanunk.

R. Zs.

II. megoldás. Rendezzük nagyság szerint növekvően a számokat, és jelöljük a k -adikat x_k -val, az öt szám számtani közepét $\bar{x}$ -sal. Először belátjuk, hogy

$$(1) \quad \sum_{k=1}^m (x_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^m x_k^2 - m\bar{x}^2,$$

ahol $m = 5$. Ha ugyanis (1) bal oldalán elvégezzük a négyzetre emelést, első tagként a jobb oldal első tagját kapjuk. A négyzetek második tagja

$$-2\bar{x} \sum_{k=1}^m x_k = -2m\bar{x}^2$$

miatt egyenlő a harmadik tag 2-szeresével, és a négyzetek harmadik tagjaival együtt éppen (1) jobb oldalán a második tagot adják.

A következő lépésünk a

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m (x_k - x_j)^2 = 2m \sum_{k=1}^m (x_k - \bar{x})^2$$

összefüggés igazolása. Most feltehetjük, hogy $\bar{x} = 0$, mert különben az $x_k = \bar{x}$ különbségeket írhatjuk az x_k számok helyére. Ismét elvégezve a négyzetre emelést a bal oldalon, a négyzetes tagokból azt kapjuk, ami a jobb oldalon áll, a vegyes tagok összege pedig $\bar{x} = 0$ miatt nulla.

Mivel $x_{k+1} > x_k + 1$, általában $k \neq j$ esetén $|x_k - x_j| > k - j$, tehát $m = 5$ mellett

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m (x_k - x_j)^2 > 4^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 1^2 = 50.$$

Emiatt (1) és (2) alapján

$$\sum_{k=1}^m x_k^2 \geq \sum_{k=1}^m (x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m (x_k - x_j)^2 > 10,$$

amint azt igazolnunk kellett.

Megjegyzés. A kitűzés szövegében a számok különbségét – a közhasználatot követve – természetesen abszolút értékben értettük. Ez nem is okozott zavart a megoldóknak.