

Először is belátjuk, hogy a keresett  $k$  legalább 3. Az egyest tartalmazó mezőnek négy másik mezővel van közös oldala, ugyanakkor a papírlapon csak 2 darab kettes szerepel. Így az egyik szomszédos mezőbe kettőnél nagyobb szám kerül, tehát különbségük legalább 2.

A következőkben megmutatjuk, hogy  $k = 3$  esetén a kitöltés elvégezhető. A négyzet háló egy egyenesével a papírlapot két félsíkra osztjuk. Az egyik félsík mezőibe csak páratlan, a másik félsík mezőibe csak páros számokat írunk. Az egyest és a kettéseket a határegyenes mentén helyezzük el, úgy, hogy az egyik kettest tartalmazó mezőnek legyen közös oldala az egyest tartalmazó mezővel is, és a másik kettest tartalmazó mezővel is. Az egyes fölé és mellé hármasokat írunk, ezek fölé és mellé ötösöket és így tovább (1. ábra).

			7			
		7	5	7		
	7	5	3	5	7	
7	5	3	1	3	5	7
6	4	2	2	4	6	
	6	4	4	6		
		6	6			

1. ábra

Hasonlóan járunk el a másik félsíkban a páros számok elhelyezésénél.

Az egyező számokat tartalmazó ék alakú rétegekben mindig kettővel nagyobb számok vannak, mint a megelőző rétegekben, az egyes rétegekben található számok száma is mindig 2-vel nő. Így ha 1 darab egyes és 2 darab kettes számból indultunk ki, akkor tetszőleges pozitív egész  $n$  is éppen  $n$ -szer fog előfordulni. A kitöltés módjából következik, hogy egy félsíkon belül a közös oldallal rendelkező mezőkben levő számok különbsége 2 vagy 0. A különböző félsíkokból való, közös oldallal rendelkező mezőkben levő számok pedig szomszédosak. A leírt kitöltés tehát megfelel a feladat feltételeinek.

		7	7			
	7	5	5	7		
7	5	3	3	5	7	
6	4	2	1	3	5	7
	6	4	2	4	6	
		6	4	6		
			6			

2. ábra

			7			
		6	5	7		
	6	4	3	5	7	
6	4	2	1	3	5	7
7	5	3	2	4	6	
	7	5	4	6		
		7	6			

3. ábra

Papp Gábor (Budapest, Móricz Zs. Gimn., III. o. t.)

*Megjegyzés.* Megmutatható, hogy  $k = 3$  esetén minden megfelelő kitöltés az 1–3. ábrákon látható kitöltésekből tükrözéssel,  $90^\circ$ -os elforgatással, valamint eltolással állítható elő.