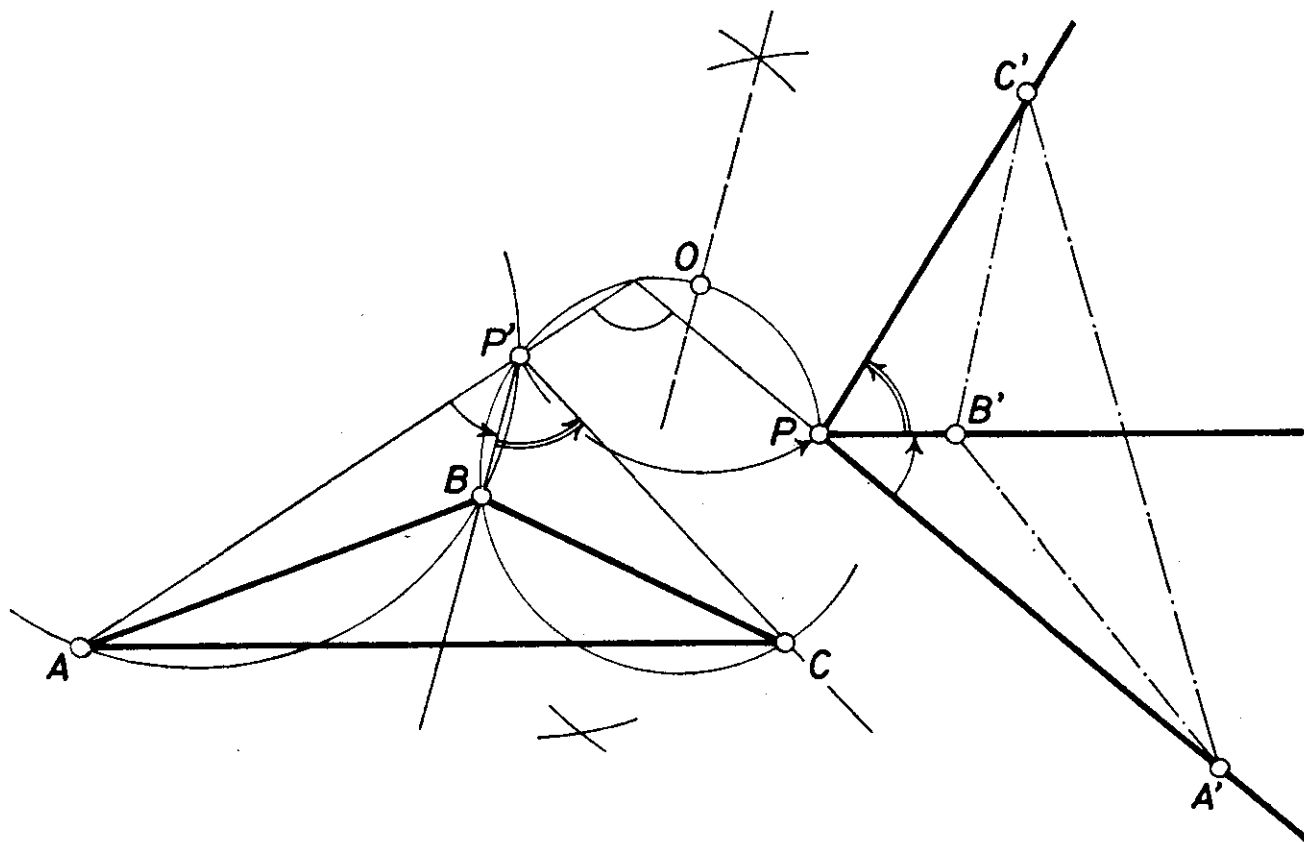


I. megoldás. Mivel az A', B', C' pontok adott helyzete csak az adott P pontból feléjük futó félegyenesek kijelölésére szolgál, jelöléseink egyszerűsítése kedvéért feltesszük, hogy a keresett forgatás az A, B, C pontokat rendre az A', B', C' pontokba viszi.

A feladat két részre vágható: egyik rész az ABC -vel egybevágó $A'B'C'$ háromszög megtalálása, a másik az előbbi az utóbbiba vivő forgatás előállítás. Az első részben elegendő az ABC -hez hasonló háromszöget keresni, hiszen ha ilyen találunk, azt alkalmas méretű, P centrumú nagyítás már a kívánt méretre transzformálja. Csak arra kell ügyelnünk, hogy az $A'B'C'$ háromszög α, β, γ szögei forgásuk irányában is megegyezzenek az ABC háromszög α, β, γ szögeivel, hiszen a sík forgatásai a forgásszögek irányát nem változtatják meg.

A megoldás első lépéseként ezt a feladatot fordítjuk meg, és az A, B, C csúcsokhoz olyan P' pontot keresünk, amelyre a $P'A, P'B, P'C$ félegyeneseket ugyanolyan nagyságú és irányú forgatás viszi egymásba, mint a PA', PB', PC' egyeneseket. Elegendő például azt biztosítani, hogy $P'A$ -t a $P'B$ -be ugyanakkora forgatás vigye, mint PA' -t PB' -be, és $P'B$ -t a $P'C$ -be ugyanakkora forgatás vigye, mint PB' -t PC' -be, hiszen a $P'C$ -t $P'A$ -ba vivő forgatás akkor már biztosan megegyezik a PC' -t PA' -be vivő forgatással.

Mivel mindkét követelmény egy-egy jól ismert mértani helyet jelöl ki az ABC háromszög síkjában (egy AB feletti és egy BC feletti körívet), a szerkesztés első lépése ezek megrajzolásából áll, és a feladat megoldhatósága azon múlik, metszi-e egymást ez a két körív (1. ábra).



1. ábra

Nézzük meg, mit mondhatunk általában az $A'B'C'$ háromszög α', β', γ' szögeiről, ha az A', B', C' pontok egymástól függetlenül bejárják a számukra adott félegyeneseket. Három, egy pontból induló félegyenes vagy lefedi a síkot, vagy nem, ami pontosabban azt jelenti, hogy a félegyenesek egyenese vagy rendre elválasztja egymástól a másik két félegyeneset, vagy nem.

Ha a három adott félegyenes lefedi a síkot, az $A'B'C'$ háromszög körüljárását eleve meghatározzák, a feladat tehát csak akkor oldható meg, ha ez megegyezik az ABC háromszög körüljárásával. Mivel ekkor P az $A'B'C'$ háromszög belső pontja, belőle az oldalak rendre nagyobb szög alatt látszanak, mint a megfelelő csúcsokból. Ilyenkor tehát a feladat csak akkor oldható meg, ha

$$(1) \quad \angle ABC < \angle A'PC', \quad \angle BCA < \angle B'PA', \quad \angle CAB < \angle C'PB'.$$

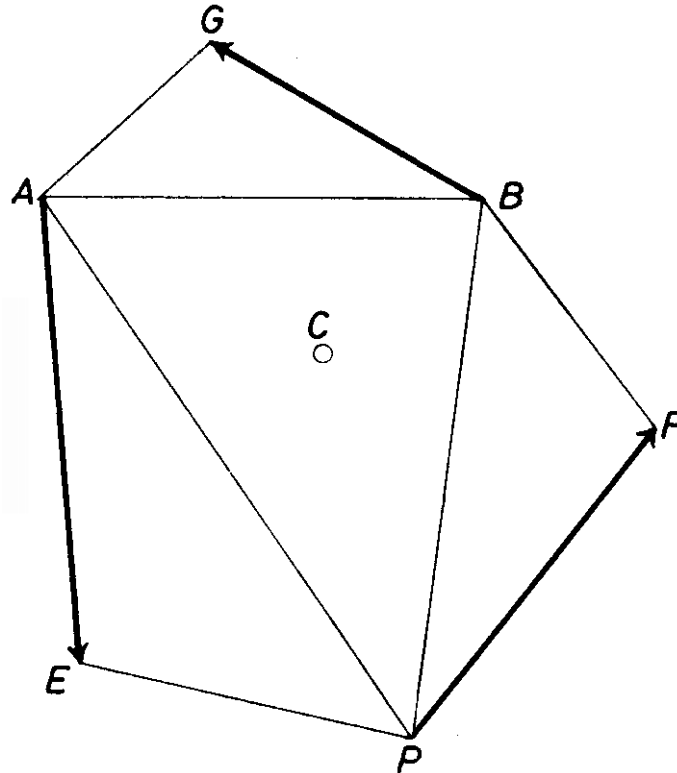
Ha ez teljesül, akkor az AB feletti, az $A'PC'$ szöghöz tartozó látókörvnek van az ABC háromszög belsejében levő darabja. Ezen mozgatva a P' pontot az AC oldaltól a BC oldalig kezdetben, az $\angle AP'C$, majd a $\angle BP'C$ szög lesz 180° -kal egyenlő. Van tehát közben P' -nek olyan helyzete, amikor ezek az előírt szögekkel egyenlőek (2. ábra).

II. megoldás (vázlat). Tovább egyszerűsítjük jelöléseinket, és elhagyjuk a vesszőket, hiszen a megoldást záró forgatás különösebb gondot nem okozhat. Felhasználjuk azt az I. megoldásban felbukkanó gondolatot is, hogy elegendő az adott háromszöghöz hasonlót találni, amelynek csúcsai már az adott félegyeneseken vannak. Adott tehát három félegyenes, és keressük rajtuk az A, B, C pontokat úgy, hogy az ABC háromszög szögei nagyságra és irányra megegyezzenek három adott szöggel. Legyen A, B, C, P az a pontnégyes, ami a megoldást jelenti.

Tekintsük azt az A centrumú forgatva nyújtást (vagyis A centrumú forgatást és ezt követő A centrumú nyújtást vagy zsugorítást), amelyik B -t P -be viszi. Vigye ez C -t E -be, és vigye C -t F -be az a B centrumú forgatva nyújtás, amelyik A -t viszi P -be. Belátható, hogy ekkor

$$(4) \quad \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PC}.$$

Forgassuk el emiatt az adott PA félegyeneset P körül akkora forgatással, ami a BA félegyeneset BC -be viszi, és jelöljük a félegyenes új helyzetét e -vel. Majd forgassuk el PB -t P körül az AB -t AC -be vivő forgatással, így kapjuk az f félegyeneset. Legyen C a számára adott félegyenes tetszés szerinti pontja. Bontsuk a $\overrightarrow{PC}$ vektort e és f irányú komponensekre. Így kapjuk az E, F pontokat, amelyekbe a C -nél adott szöget behelyezve az A -t és B -t kimetsző félegyeneseket kapunk (4. ábra).



4. ábra

A feladat megoldhatósága tehát a (4) felbontáson múlik, amihez az kell, hogy az e, f félegyenesek fogják közre a PC félegyeneset. Az olvasóra hagyjuk annak végiggondolását, hogy ebből valóban az (1), (2), (3) feltételeket kapjuk.

Megjegyzések. 1. A II. megoldásból látszik, hogy feladatunk azonos az úgynevezett „hátrametszéssel”. A térképészetben szerepel különösen gyakran az a feladat, hogy az ismeretlen helyzetű P pontot úgy azonosítsuk a síkon, hogy megmérjük, mekkora szögek alatt látszanak belőle az ismert A, B, C tereppontok. Lapunkban utoljára annak vizsgálata szerepelt ezzel kapcsolatban, hogy milyen mértékben csökken a módszer megbízhatósága, ha P -vel közeledünk az ABC háromszög köré írható körhöz. Ha ugyanis P ezen a „veszélyes” körön van (aminek a (3) alatti különbségek eltűnése felel meg), akkor nem határozza meg, a helyzetét a PA, PB, PC félegyenesek kölcsönös helyzete.

2. Legyen még C -nek AB felezőpontjára vonatkozó tükröképe G , és jelöljük (tetszőleges origó mellett) a szóban forgó pontok helyvektorát a megfelelő kisbetűvel. Azt kell belátni, hogy (4. ábra)

$$e + f = c + p,$$

és mivel $a + b = c + g$, ez azt jelenti, hogy

$$e + f + g = a + b + p,$$

vagyis az $e - a, f - p, g - b$ vektorok háromszöggé fűzhetők össze. Hát persze, az AEC háromszöggé, hiszen az PA -t AE -be, PB -t PF -be, BA -t BG -be vivő forgatva nyújtásokban a forgatás és a nyújtás azonos, csak a centrum más. Ha az ABP háromszög mindhárom oldalára ezt a transzformációt az A centrum mellett alkalmazzuk, akkor kapjuk az AEC háromszöget.