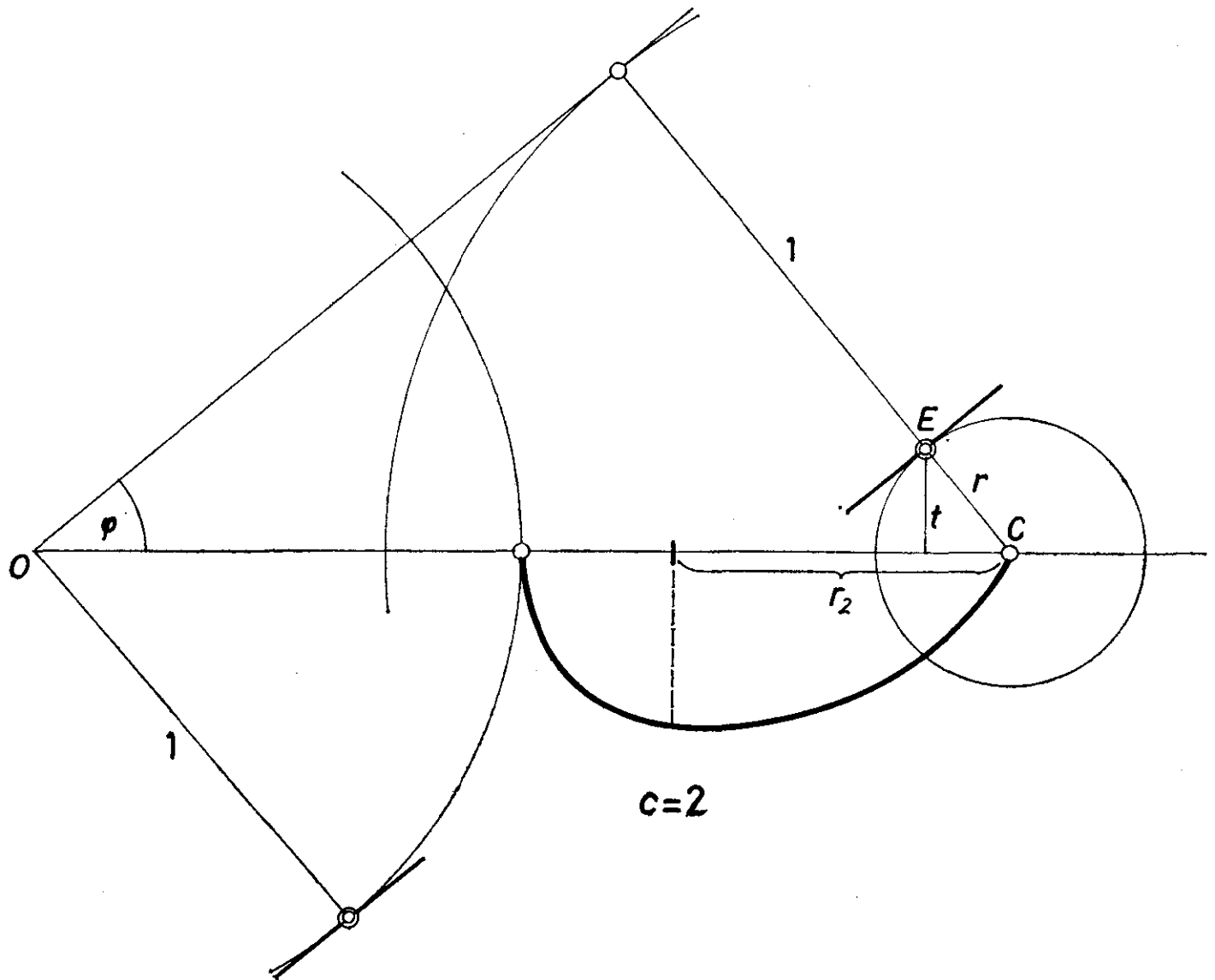


Legyen a rögzített kör sugara a hosszúságegység, középpontja a koordináta-rendszer origója, a másik kör centruma a $C(c, 0)$ pont és sugara r . A követelményekre tekintettel $c > 1$ és $0 \leq r \leq c - 1$.



Ekkor a belső közös érintők egyikének φ irányszögére – az irány ismert szerkesztési elve szerint –

$$\sin \varphi = \frac{1+r}{c}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - (1+r)^2}.$$

Ebből a kérdéses E érintési pontnak OC -től való távolsága

$$t = r \sin(90^\circ - \varphi) = \frac{r}{c} \sqrt{c^2 - (1+r)^2}.$$

Ez nem negatív, ezért elég megkeresnünk t^2 maximumát:

$$t^2 = \frac{c^2 - 1}{c^2} r^2 - \frac{2}{c^2} r^3 + \frac{1}{c^2} r^4.$$

Keressük, hol tűnik el a deriváltja. Ez, mindjárt átrendezés után:

$$\left(-\frac{2r}{c^2}\right) (2r^2 + 3r - c^2 + 1) = 0.$$

Az első tényező révén $r = 0$ mellett teljesül ez, de mi nem ezt keressük, hiszen itt $t = 0$.

A nagy zárójelbeli másodfokú polinomnak két különböző zérushelye van: r_1, r_2 -ben, hiszen $r_1 r_2 = -(c^2 - 1)/2 < 0$, előjelük különböző; legyen $r_1 < 0 < r_2$. Így r_1 nincs benne t értelmezési tartományában,

$$r_2 = -\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{1}{16}}$$

viszont benne van, mert a tartomány jobb végpontjában, $(c-1)$ -ben már pozitív a polinom értéke: $c^2 - c = c(c-1) > 0$ (és mert a másodfokú tag együtthatója pozitív).

Az r_2 helyen növekedve halad át a polinom, tehát a derivált csökkenően. Eszerint ott t^2 -nek maximuma van, és vele együtt t -nek is. Ezzel a feladatot megoldottuk.