

I. megoldás. Tegyük föl, hogy a lift a feladat feltételei szerint mozgott, és s méternyi utat tett meg. Jelölje n_i azt, hogy a lift mozgása során hányszor tette meg az $(i-1)$ -edik és i -edik szint közötti útszakaszt ($i = 1, 2, \dots, 10$, a 0-dik szint a földszint). Az egyes felfelé menetek kezdő és végpontjai különbözőek voltak, így az $(i-1)$ -edik és az i -edik szint közötti útszakaszt felfelé a lift legfeljebb $\min(i, 10 - (i-1))$ alkalommal tehetette meg. Figyelembe véve, hogy lefelé haladva a lift a 0-dik szintre nem érkezhett, ugyanezt az útszakaszt a lift lefelé haladva a végpontok különbözősége miatt legfeljebb $\min(i-1, 10 - (i-1))$ alkalommal tehetette meg. Mivel $i \leq 5$ esetén $\min(i, 10 - (i-1)) = i$ és $\min(i-1, 10 - (i-1)) = i-1$, továbbá $i > 5$ esetén $\min(i, 10 - (i-1)) = \min(i-1, 10 - (i-1)) = 10 - (i-1)$, tehát az első esetben $n_i \leq 2i - 1$, a második esetben $n_i \leq 2(11 - i)$. Emiatt

$$S = 4(n_1 + \dots + n_{10}) \leq 4(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2) = 220.$$

Tehát a lift legfeljebb 220 méternyi utat tett meg. Ennyi utat meg is tett, ha mozgása során például a szinteken a következő sorrendben állt meg: 0; 10; 1; 9; 2; 8; 3; 7; 4; 6; 5.

II. megoldás. Tegyük föl, hogy a lift úgy mozgott, hogy maximális utat tett meg. Ekkor minden megállás után irányt változtatott. Ha ugyanis az i -edik, j -edik szintekre egymás után, irányváltoztatás nélkül érkezett volna, akkor az i -edik szinten való megállást kihagyva, majd az út befejezése után ide visszatérve, az így módosított út hosszabb, mint a lift által megtett út, amiről pedig feltettük, hogy maximális.

Jelölje m_i az i -edik megállás szintjét, $i = 1, 2, \dots, 10$. A lift által megtett út

$$\begin{aligned} m_1 + (m_1 - m_2) + (m_3 - m_2) + (m_3 - m_4) + \dots + (m_9 - m_{10}) &= \\ = 2[(m_1 + m_3 + m_5 + m_7 + m_9) - (m_2 + m_4 + \dots + m_8)] - m_{10}. \end{aligned}$$

Látható, hogy a megtett út akkor maximális, ha a fenti összegben a 10, 9, 8, 7, 6 szintek pozitív, a megmaradó szintek negatív előjellel szerepelnek. Mivel a kivonandók közül m_{10} együtthatója a legkisebb, ezért $m_{10} = 5$, vagyis a lift végül az 5-dik szinten állt meg. A további m_i értékek – a fenti megszorítás mellett – tetszőlegesek lehetnek. A fenti megszorításnak eleget tevő m_i értékekhez tartozó maximális úthossz 220 m.

Megjegyzések. 1. Mindkét megoldásból nyilvánvaló, hogy a lift nemcsak egyetlen módon teheti meg a maximális 220 m-t. Az ilyen utak száma $5! \cdot 4! = 2880$.

2. A feladat könnyen általánosítható n emeletes házra. Ekkor a lift maximálisan $2n(n+1)$ méternyi utat tesz meg. **(R. ZS).**