

Milyen valós számokra lesz a

$$(1) \quad \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 + 1}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

kifejezés értéke egész szám?

I. megoldás. Jelöljük az (1) kifejezés első tagját A -val, a másodikat B -vel

$$(2) \quad A = \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 + 1}}, \quad B = \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 + 1}},$$

a kifejezés értékét pedig C -vel:

$$(3) \quad A + B = C.$$

Mivel A és B szorzata minden x mellett (-1) -gyel egyenlő, ezek a mennyiségek egy adott x mellett a

$$(4) \quad z^2 - Cz - 1 = 0$$

másodfokú egyenlet gyökei, mégpedig A a pozitív gyök, és B a negatív, hiszen x mindig kisebb $\sqrt{x^2 + 1}$ -nél. Megfordítva, a (4) egyenletnek minden C mellett két gyöke van, és közülük az egyik pozitív, a másik negatív, hiszen C kisebb $\sqrt{C^2 + 4}$ -nél.

Ezek szerint tetszőleges valós C -hez pontosan egy olyan (A, B) számpár tartozik, amelyre $A + B = C$, $AB = -1$, és $B < 0 < A$ is teljesül, és ez a számpár a következő:

$$(5) \quad A = \frac{C}{2} + \sqrt{\left(\frac{C}{2}\right)^2 + 1}, \quad B = \frac{C}{2} - \sqrt{\left(\frac{C}{2}\right)^2 + 1}.$$

Ha van olyan x , amelyre (2) teljesül az így megválasztott A, B számpárhoz, akkor a (2)-ből következő

$$A^3 = x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad B^3 = x - \sqrt{x^2 + 1}$$

összefüggések miatt az csak az

$$(6) \quad x = \frac{1}{2}(A^3 + B^3)$$

szám lehet. Megmutatjuk, hogy ez mindig megfelel.

Lehet tehát C tetszőleges valós szám, és A, B, x legyenek a belőle (5) és (6) szerint előállított számok. Számítsuk még ki az

$$y = \frac{1}{2}(A^3 - B^3)$$

számot, akkor $B < 0 < A$ miatt $y > 0$, és

$$y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) = -A^3 B^3 = +1$$

miatt $y = \sqrt{x^2 + 1}$, tehát a (6) szerint számolt x -re valóban teljesül (2). Mivel A és B (4) gyökei,

$$x = \frac{1}{2}(A^3 + B^3) = \frac{1}{2}[(A + B)^3 - 3AB(A + B)] = \frac{1}{2}(C^3 + 3C).$$

Tehát az (1) alatti kifejezés értéke minden valós C számmal pontosan egy x mellett egyenlő, és ez az $x = \frac{1}{2}(C^3 + C)$ érték. Érvényes ez természetesen egész C -re is, és akkor mint az könnyen látható, x is egész.

II. megoldás. Jelöljük most is az adott kifejezés értékét C -vel. Az összeg két tagjának szorzata éppen -1 , tehát az $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ összefüggés alapján

$$C^3 = (x + \sqrt{x^2 + 1}) + (x - \sqrt{x^2 + 1}) - 3C,$$

ahonnan

$$(7) \quad x = \frac{1}{2}(C^3 + 3C).$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha (1) kifejezés értéke a C szám, akkor x a (7) alakban írható. Azt állítjuk, hogy bármely egész C -re a (7) alatti x értékre az (1) kifejezés értéke egész szám lesz (nevezetesen éppen C). Ha ezt megmutattuk,

akkor ezzel a feladat kérdésére is válaszoltunk: pontosan azokra az x valós számokra lesz (1) értéke egész, melyek a (7) alakba írhatók.

Az utóbbi állítás igazolásához legyen a (7) alatti x értékre az (1) kifejezés értéke éppen D . Ekkor x értéke (7) alapján $\frac{1}{2}(D^3 + 3D)$ -vel is egyenlő. Az x -re kapott két érték különbsége

$$0 = \frac{1}{2}(C^3 + 3C) - \frac{1}{2}(D^3 + 3D) = \frac{1}{4}(C - D)[C^2 + D^2 + (C + D)^2 + 6],$$

ahonnan $C = D$, ahogyan állítottuk.

Megjegyzés. A dolgozatok legtöbbszörében a versenyzők megelégedtek azzal, hogy a (7) összefüggésig eljutottak, de nem igazolták, hogy bármely egész C esetén megfelelő x -hez jutunk. A (7)-t előállító levezetés ugyanis *nem megfordítható*; nem ekvivalens átalakításokat végeztünk, s így elképzelhető, hogy egy (7) által meghatározott helyen (1) nem C -t, hanem valamilyen más értéket vesz fel. Hogy ez nem így van, az külön bizonyításra szorul.