$$(1) \qquad (a_1+\ldots+a_{1980})\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_{1980}}\right)\le\frac{1980^4}{1980^2-1}.$$

Megoldás. Jelöljük 1980-at n-nel, $1/n$-et ε-nal. Mint látni fogjuk, nem lesz lényeges, hogy n értéke éppen mennyi. Legyen még k tetszés szerinti 1 és n közötti egész, és vegyük ki az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok közül a k-adikat. Jelöljük ezt x-szel, a többiek összegét S-sel, a többiek reciprokának az összegét R-rel, az (1) bal oldalán álló kifejezés értékét K-val. Jelöléseink mellett

$$K=(S+x)\left(R+\frac{1}{x}\right)=\left(\sqrt{Rx}-\sqrt{\frac{S}{x}}\right)^2+(\sqrt{RS}+1)^2.$$

(Közben felhasználtuk, hogy S, R és x pozitívak.) K második alakjából látható, hogy K értéke csak az

$$f(x)=\sqrt{Rx}-\sqrt{\frac{S}{x}}$$

függvényen keresztül függ x-től. Ez viszont monoton függvény, hiszen ha $0<x<y$, akkor

$$f(y)-f(x)=(\sqrt{y}-\sqrt{x})\left(\sqrt{R}+\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{xy}}\right)>0.$$

Esetünkben $1-\varepsilon\le x\le 1+\varepsilon$, emiatt $f(1-\varepsilon)\le f(x)\le f(1+\varepsilon)$. Válasszuk x-nek és vele együtt a_k nak $(1-\varepsilon)$ és $(1+\varepsilon)$ közül azt, amelyik mellett $f(1-\varepsilon)$ és $f(1+\varepsilon)$ abszolút értéke a nagyobb. (Ha $|f(1-\varepsilon)|=|f(1+\varepsilon)|$, akkor mindegy, melyiket választjuk a_k-nak.) Ha így változtatjuk meg a_k értékét, K értéke biztosan nem csökken. Menjünk hát végig (tetszőleges sorrendben) az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számokon, és mindegyiknek változtassuk meg az értékét vagy $(1-\varepsilon)$-ra, vagy $(1+\varepsilon)$-ra úgy, hogy ezzel K kezünkben levő aktuális értékét ne csökkentsük. Mint láttuk, ezt mindig meg tudjuk tenni. Az eljárásunk végén mindegyik a_i új értéke vagy $(1-\varepsilon)$ lesz, vagy $(1+\varepsilon)$. Jelöljük az $(1-\varepsilon)$-nal egyenlő a_i-k számát m-mel, az $(1+\varepsilon)$-nal egyenlőekét p-vel. Akkor $m+p=n$, és persze m és p közül az egyik 0 is lehet. Ezek mellett a kifejezés értéke legyen K_{mp}:

$$K_{mp}=[m(1-\varepsilon)+p(1+\varepsilon)]\left[\frac{m}{1-\varepsilon}+\frac{p}{1+\varepsilon}\right]=\frac{n^2-\varepsilon^2(m-p)^2}{1-\varepsilon^2}.$$

Állításunk most már abból következik, hogy egyrészt $K\le K_{mp}$, másrészt $K_{mp}\le n^2/(1-\varepsilon^2)=n^4/(n^2-1)$.

Gulyás Gyula (Miskolc, Kilián Gy. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A számtani és a harmonikus középre vonatkozó egyenlőtlenség alapján belátható, hogy $K\ge n^2$. Mivel $n^4/(n^2-1)<n^2+2$, a két egyenlőtlenség együtt azt jelenti, hogy amíg az a_i változókra $|a_i-1|\le\varepsilon$ teljesül, a K függvény értéke egy 2 szélességű sávon belül marad. Ez meglepőnek mondható, ha arra gondolunk, hogy K értéke és a változók száma milyen nagy, viszont mégsem annyira meglepő, hiszen ε értéke kicsi.