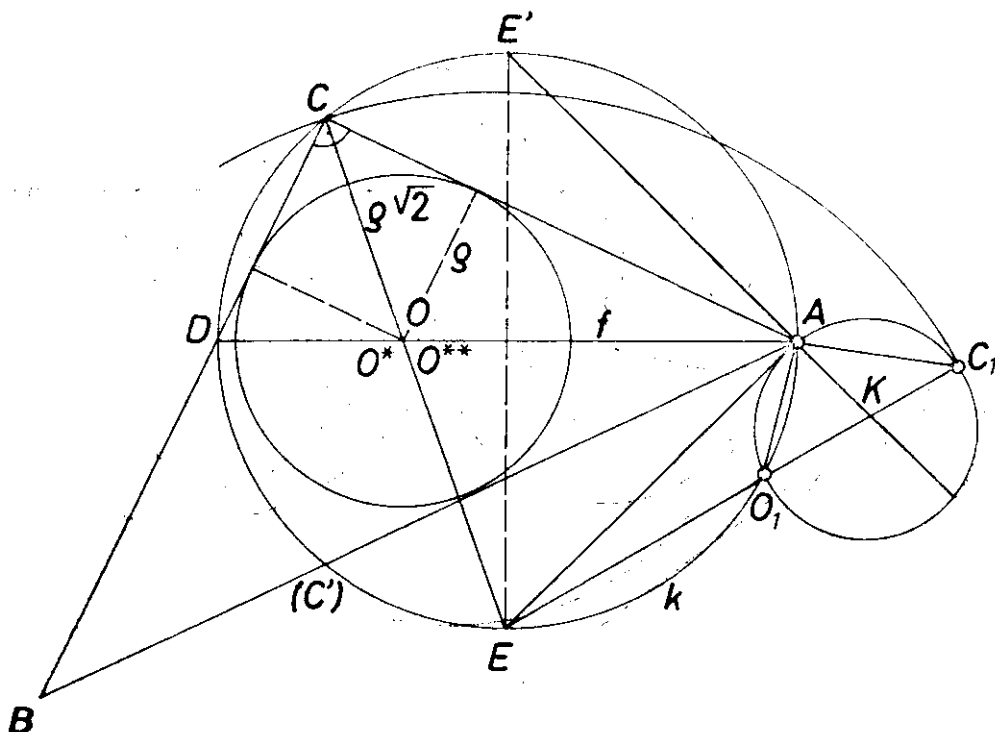


Az AD szakasz fölötti k Thalész-kört a CO szakasz meghosszabbítása az AD -re merőleges átmérő E végpontjában metszi, így lesz $DCE \sphericalangle = ECA \sphericalangle = 45^\circ$. Ekkor AEO és CEA hasonló háromszögek (2-2 szögük páronként egyenlő), ennél fogva

amiből

Ezzel tulajdonképpen másodfokú egyismeretlenes egyenletet kaptunk EC -re, hiszen EA a k révén ismertté váló szakasz.


$$(2) \quad \begin{aligned} EA : EO_1 &= EC_1 : EA, \\ EO_1 \cdot EC_1 &= (EC_1 - CO) \cdot EC_1 = EC_1^2 - CO \cdot EC_1 = EA^2, \end{aligned}$$

Ezek alapján a szerkesztés, mindjárt teljesítve a feladat követelését is: az E körüli EC_1 sugarú körrel kimetsszük k -ból C -t – úgy, hogy $CA > CD$ legyen –, vesszük C -nek AD -re való C tükörképét, ekkor a CD , AC egyenesek metszéspontja megadja a keresett háromszög hátra levő B csúcsát.

A kapott ABC háromszögben C -nél valóban derékszög van, benne AD felezi a CAB szöget, és beírt körének középpontja az AD és CE szögfelezők O^* metszéspontja. Azt kell még belátnunk, hogy a CO^* szakasz egyenlő az előírt $CO = C_1O_1$ szakasszal. Mérjük fel CE -re a $CO^{**} = CO$ szakaszt. Ekkor a C, O^{**}, E, A pontalakzatban $CE = C_1E$ miatt teljesül (2) és (1a), tehát az (1)-nek megfelelő $AE : EO^{**} = CE : CA$ is, ezért AEO^{**} és CEA hasonló háromszögek, $O^{**}AE \sphericalangle = ACE \sphericalangle = 45^\circ = DAE \sphericalangle$, így O^{**} a DA egyenesen van; másrészt O^{**} a CE -n van, tehát azonos O^* -gal. Ennélfogva $CO^* = CO = \varrho\sqrt{2}$, tehát O^* -nak a CB és CA , továbbá az AB oldalaktól való távolsága valóban ϱ .

A C pont akkor és csak akkor jön létre a kör DE' negyedívén mint belső pont, ha

$$ED < EC < EE' = DA,$$

amiből az első egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül. A másodikhoz szükséges:

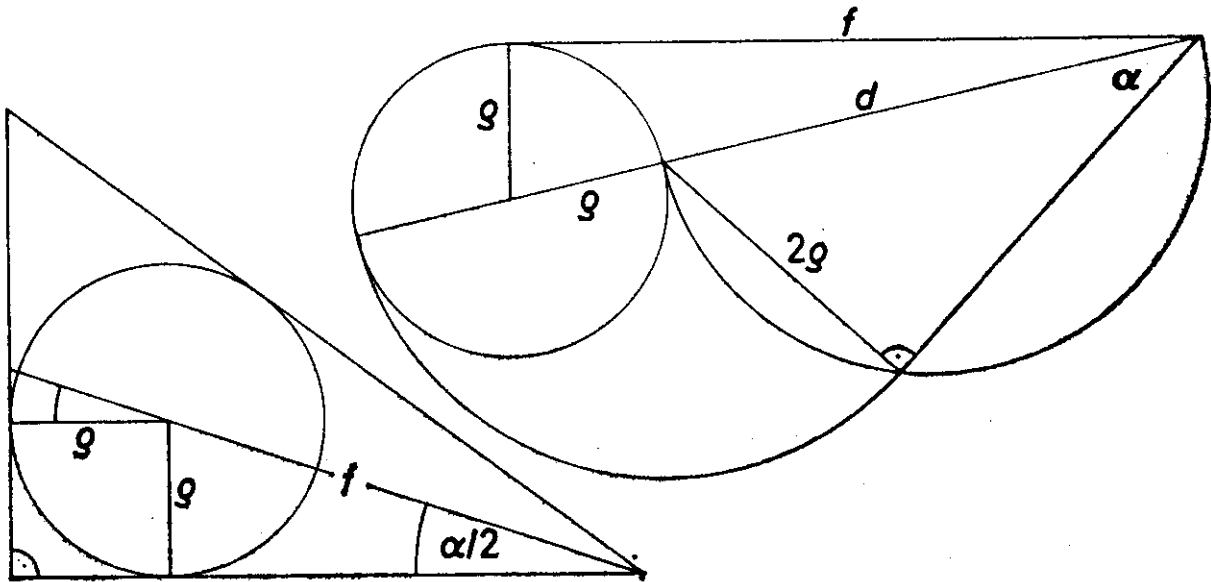
$$EK = EC - \frac{CO}{2} < DA - \frac{CO}{2},$$

amiből egyszerű számítással (minden pozitív)

$$\frac{f^2}{2} < f^2 - f \cdot CO, \quad CO = \varrho \sqrt{2} < \frac{f}{2}, \quad f > \sqrt{8} \varrho.$$

II. megoldás. Jelöljük (mint az I. megoldásban) az adott szakaszokat ϱ -val, f -fel, az f által felezett hegyesszöget α -val. A beírt kör középpontja a háromszög befogóival együtt egy ϱ oldalú négyzetet határoz meg, amelyhez két, egymással hasonló derékszögű háromszög csatlakozik. Ezek átfogóinak az összege f , egyik hegyesszögük $\alpha/2$, emiatt

$$\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{f}{\varrho}.$$



Jelöljük a jobb oldalon álló hányadost λ -val, és vegyük mindkét oldal négyzetét:

$$\frac{4(1 + \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \lambda^2,$$

amiből teljes négyzetté kiegészítve kapjuk, hogy

$$(1) \quad \left(\frac{2}{\sin \alpha} + 1 \right)^2 = \lambda^2 + 1.$$

Mivel esetünkben $0 < \sin \alpha < 1$, a feladatnak csak akkor van megoldása, ha a jobb oldal értéke nagyobb 9-nél, vagyis $f > \varrho \sqrt{8}$. Ha ez teljesül, a kapott (1) összefüggés α értékét egyértelműen meghatározza. A szerkesztés kedvéért írjuk vissza λ értékét, kapjuk, hogy

$$(2) \quad (d + \varrho)^2 = f^2 + \varrho^2,$$

ahol d annak a derékszögű háromszögnek az átfogója, amelynek az α -val szemközi befogója 2ϱ . Tehát az f , ϱ befogójú derékszögű háromszög átfogójából elveszünk egy ϱ -nyi darabot, majd a maradék fölé Thalész-kört rajzolunk, és ezt a szakasz egyik végpontja körüli, 2ϱ sugarú körrel elmeszve megkapjuk az α szöget. Ebből és ϱ -ból a keresett háromszög már könnyen megrajzolható. Mivel a kapott (2) összefüggés ebben is érvényes, benne az α szög felezője egyenlő az adott f szakasszal, hiszen (2) ennek az értékét is egyértelműen meghatározza.