

**I. megoldás.** A bogár lépései során felváltva hol az első, hol a második koordinátáját változtatja meg. Páratlan sorszámú lépéseivel az első koordinátáját módosítja, mégpedig mindig az ellentétes irányban és negyedakkora mértékben, mint közvetlenül előtte. Emiatt az első koordináta  $k$  módosítása, tehát a  $(2k - 1)$ -edik lépés után az első koordinátája

$$x_{2k-1} = 1 - \frac{1}{4} + \dots + \left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^k}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}$$

lesz, és ugyanennyi marad az értéke a  $2k$ -adik lépés után is.

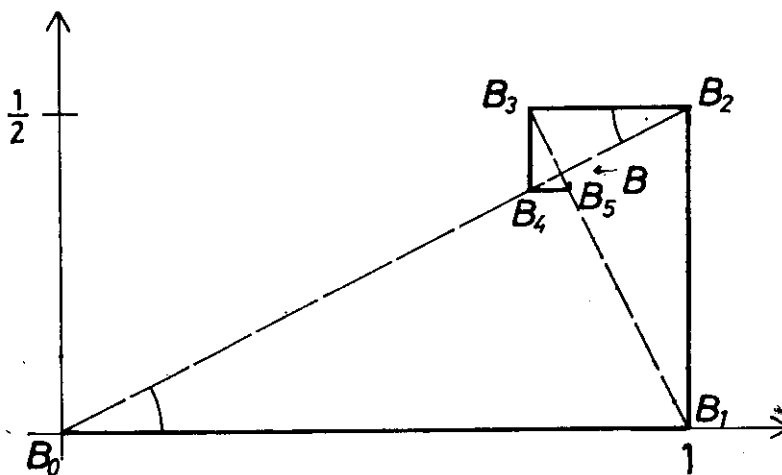
A második koordináta hasonlóan változik, a  $2k$ -adik lépés után az értéke

$$y_{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} x_{2k-1},$$

és ugyanennyi marad az értéke a  $(2k + 1)$ -edik lépés után is. Mivel 4 egymás utáni hatványai különböző egész számok, közülük a  $k$ -adik nagyobb a  $k$ -adik pozitív egésznél, vagyis  $4^k > k$ . Emiatt  $4^k$  minden határon túl nő, ha  $k$  befutja a pozitív egészeket, és  $4^{-k}$  0-hoz tart. Tehát  $x_n$  határértéke  $4/5$ , és  $y_n$  határértéke ennek fele,  $2/5$ .

Jelöljük  $B_n$ -nel az  $(x_n; y_n)$  és  $B$ -vel a  $\left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$  pontot. Mivel  $B_n$  és  $B$  távolsága kisebb az  $|x - x_n| + |y - y_n|$  összegnél, és ez az utóbbi 0-hoz tart, a bogár a  $B\left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$  pontot közelíti meg egyre jobban.

**II. megoldás.** Jelöljük továbbra is  $B_n$ -nel a bogár helyzetét az  $n$ -edik lépés után, és  $B_0$ -lal az origót.



A  $B_n B_{n+1} B_{n+2}$  háromszögek  $n = 0, 1, 2, \dots$  mellett mind hasonlóak, hiszen derékszögűek, és a  $B_n B_{n+1}, B_{n+1} B_{n+2}$  befogók aránya  $n$ -től függetlenül  $2 : 1$ . Nevezetesen a  $B_0 B_1 B_2, B_2 B_3 B_4$  háromszögekben a  $B_0$ -nál, illetve  $B_2$ -nél levő szögek egyenlőek, és száraik ellentétes irányításúak. Emiatt az átfogóik egyenese azonos,  $B_4$  rajta van a  $B_0 B_2$  szakaszon. Hasonlóan kapjuk, hogy  $B_5$  rajta van a  $B_1 B_3$  szakaszon, vagyis a  $B_4 B_5$  szakasz a  $B_0 B_2, B_1 B_3$  szakaszok  $B$  metszéspontjából, mint centrumból való  $16 : 1$  arányú kicsinyítéssel is megkapható a  $B_0 B_1$  szakaszból. Innen kezdve pedig az egész pálya folytatása megkapható úgy, hogy a  $B_0 B_1 B_2 B_3 B_4$  törött vonalra alkalmazzuk ezt a kicsinyítést, majd a kapott eredményre is alkalmazzuk, és így tovább. Más szavakkal elmondva ugyanezt, azt kapjuk, hogy ha a  $T_0 = B_0 B_1 B_2 B_3 B_4$  törött vonalra a  $B$  centrumból rendre  $16^k : 1$  arányú kicsinyítést alkalmazunk, akkor éppen a  $T_k = B_{4k} B_{4k+1} B_{4k+2} B_{4k+3} B_{4k+4}$  törött vonalat kapjuk. Mivel a  $T_0$  törött vonal pontjai közül  $B_0$  van  $B$ -től legmesszebb, ebből kapjuk, hogy  $T_k$  pontjai  $B$ -től legfeljebb  $B_0 B / 16^k$  távolságra vannak. Mivel ez 0-hoz tart (amit ugyanúgy láthatunk be, mint az I. megoldásban azt, hogy  $1/4^k$  tart 0-hoz, bár egyszerűen ez utóbbi állításból is kiolvasható), ebből következik, hogy a bogár mind jobban közeledik a  $B$  ponthoz.

A  $B_0 B_2$  egyenes egyenlete  $y = x/2$ , a  $B_1 B_3$ -é  $y = 2(1 - x)$ , emiatt ezek metszéspontjában  $x = 4/5, y = 2/5$ , tehát  $B$  koordinátái  $\left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$ .