I. megoldás. A bogár lépései során felváltva hol az első, hol a második koordinátáját változtatja meg. Páratlan sorszámú lépéseivel az első koordinátáját módosítja, mégpedig mindig az ellentétes irányban és negyedakkora mértékben, mint közvetlenül előtte. Emiatt az első koordináta k módosítása, tehát a $(2k-1)$-edik lépés után az első koordinátája

$$x_{2k-1} = 1 - \frac{1}{4} + \ldots + \left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^k}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}$$

lesz, és ugyanennyi marad az értéke a $2k$-adik lépés után is.

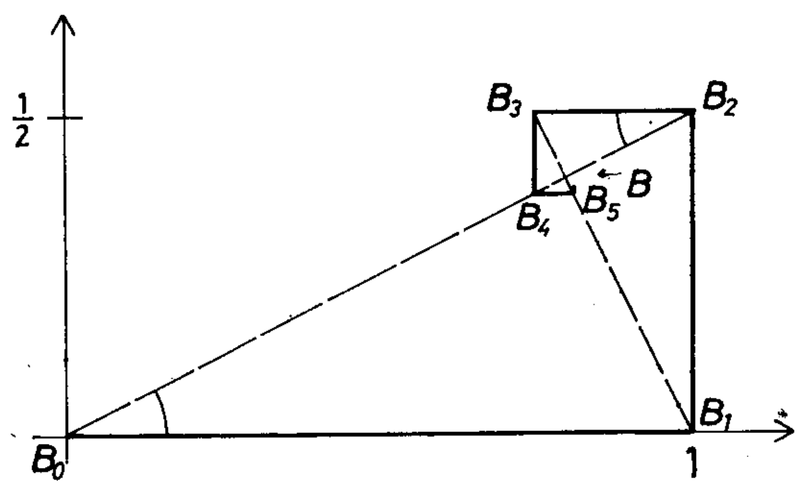
A második koordináta hasonlóan változik, a $2k$-adik lépés után az értéke

$$y_{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}x_{2k-1},$$

és ugyanennyi marad az értéke a $(2k+1)$-edik lépés után is. Mivel 4 egymás utáni hatványai különböző egész számok, közülük a k-adik nagyobb a k-adik pozitív egésznél, vagyis $4^k > k$. Emiatt 4^k minden határon túl nő, ha k befutja a pozitív egészeket, és 4^{-k} 0-hoz tart. Tehát x_n határértéke $4/5$, és y_n határértéke ennek fele, $2/5$.

Jelöljük B_n-nel az $(x_n; y_n)$ és B-vel a $\left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$ pontot. Mivel B_n és B távolsága kisebb az $|x-x_n|+|y-y_n|$ összegnél, és ez az utóbbi 0-hoz tart, a bogár a $B\left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$ pontot közelíti meg egyre jobban.

II. megoldás. Jelöljük továbbra is B_n-nel a bogár helyzetét az n-edik lépés után, és B_0-lal az origót.



A $B_nB_{n+1}B_{n+2}$ háromszögek $n = 0, 1, 2, \ldots$ mellett mind hasonlóak, hiszen derékszögűek, és a B_nB_{n+1}, $B_{n+1}B_{n+2}$ befogók aránya n-től függetlenül $2:1$. Nevezetesen a $B_0B_1B_2$, $B_2B_3B_4$ háromszögekben a B_0-nál, illetve B_2-nél levő szögek egyenlőek, és száraik ellentétes irányításúak. Emiatt az átfogóik egyenese azonos, B_4 rajta van a B_0B_2 szakaszon. Hasonlóan kapjuk, hogy B_5 rajta van a B_1B_3 szakaszon, vagyis a B_4B_5 szakasz a B_0B_2, B_1B_3 szakaszok B metszéspontjából, mint centrumból való $16:1$ arányú kicsinyítéssel is megkapható a B_0B_1 szakaszból. Innen kezdve pedig az egész pálya folytatása megkapható úgy, hogy a $B_0B_1B_2B_3B_4$ törött vonalra alkalmazzuk ezt a kicsinyítést, majd a kapott eredményre is alkalmazzuk, és így tovább. Más szavakkal elmondva ugyanezt, azt kapjuk, hogy ha a $T_0 = B_0B_1B_2B_3B_4$ törött vonalra a B centrumból rendre $16^k:1$ arányú kicsinyítést alkalmazunk, akkor éppen a $T_k = B_{4k}B_{4k+1}B_{4k+2}B_{4k+3}B_{4k+4}$ törött vonalat kapjuk. Mivel a T_0 törött vonal pontjai közül B_0 van B-től legmesszebb, ebből kapjuk, hogy T_k pontjai B-től legfeljebb $B_0B/16^k$ távolságra vannak. Mivel ez 0-hoz tart (amit ugyanúgy láthatunk be, mint az I. megoldásban azt, hogy $1/4^k$ tart 0-hoz, bár egyszerűen ez utóbbi állításból is kiolvasható), ebből következik, hogy a bogár mind jobban közeledik a B ponthoz.

A B_0B_2 egyenes egyenlete $y = x/2$, a B_1B_3-é $y = 2\,(1-x)$, emiatt ezek metszéspontjában $x = 4/5$, $y = 2/5$, tehát B koordinátéi $\left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

Danyi Pál (Pécs, Nagy Lajos Gimn., II. o. t.)