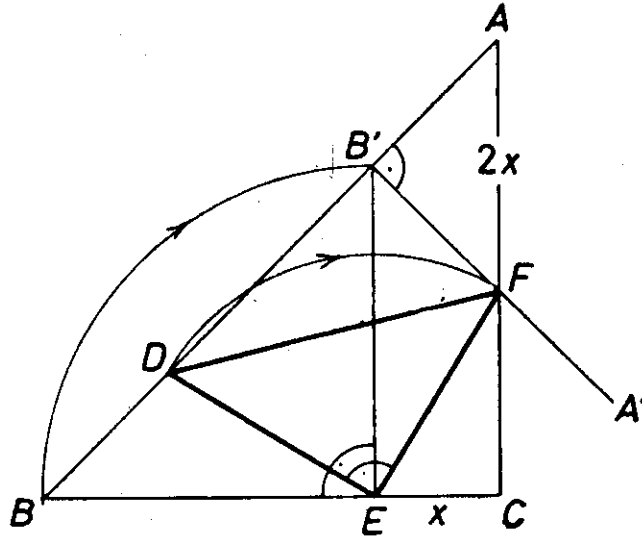


1. Legyen először $DEF \triangleleft 90^\circ$, vagyis egyszersmind $ED = EF$, ekkor könnyen szerkeszthetünk megfelelő háromszöget a BC -n fölvett E pontból kiindulva. Fordítsuk el az egész alakzatot E körül 90° -kal abban az irányban, hogy az EB félegyenes új, EB' helyzete (képe) messe a BA szakaszt (1. ábra).



Ekkor a metszéspont éppen B' , hiszen így $CBA \angle = 45^\circ$ miatt $B'E = BE$.

Legyen $CA = 1$, és jelöljük EC -t x -szel – ahol $0 < x < 1/2$ –, így az AFB' háromszög révén $AF = 2x$, tehát $CF = 1 - 2x$, és a DEF háromszög területe, mindjárt teljes négyzetté kiegészítve

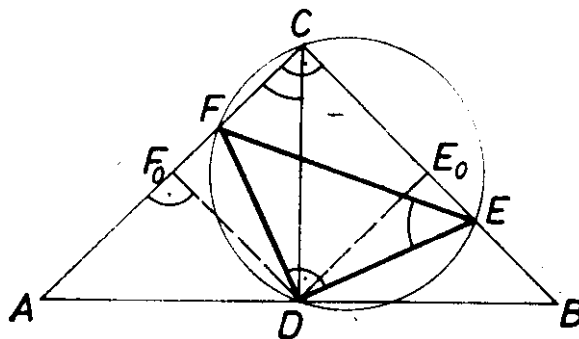
$$\frac{1}{2} \cdot EF^2 = \frac{1}{2}(CE^2 + CF^2) = \frac{1}{2}(x^2 + (1-2x)^2) = \frac{5}{2}\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{10}.$$

Másfelől az ABC háromszög területe $1/2$, ennek $1/5$ részét teszi ki a DEF háromszög területére talált minimális érték.

2. ábra

Megfelelő DEF háromszög esetében F' egybeesik E -vel, ami viszont a C csúcsban AC -re állított merőlegesen van. Eszerint megfelelően beírt háromszög csak akkor lehetséges, ha a két merőleges azonos, vagyis A' azonos C -vel; evégett pedig D -ként az AB átfogó felezőpontjából kellett kiindulnunk.

Ebben a beírásmódban is végtelen sok megfelelő DEF háromszög létezik, de most amiatt, hogy E -t nem kapjuk meg egyértelműen, az AC oldal belsejében tetszőlegesen vett F -hez tartozik megfelelő E csúcs (3. ábra).



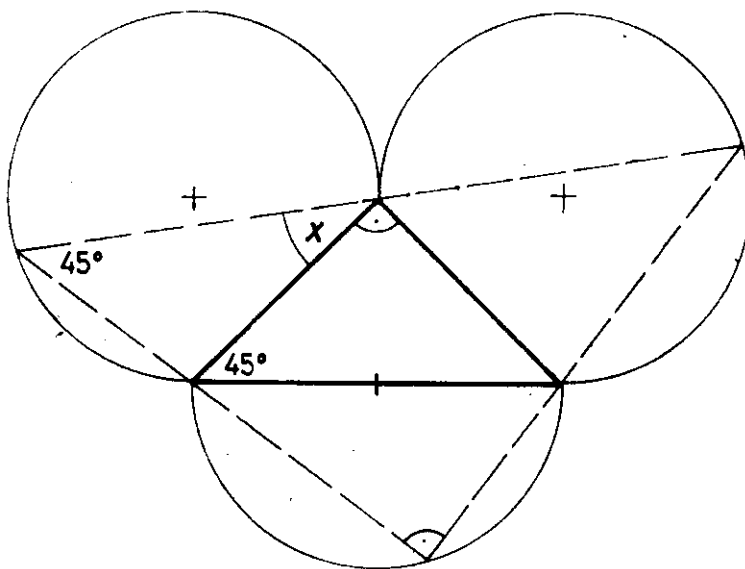
3. ábra

Mivel a DEF háromszög területe $DF^2/2$, nyilvánvalóan akkor legkisebb ez, ha DF_0 merőleges AC -re, és ekkor $DF_0 = 1/2$, a terület $1/8$, az ABC háromszög területének $1/4$ része.

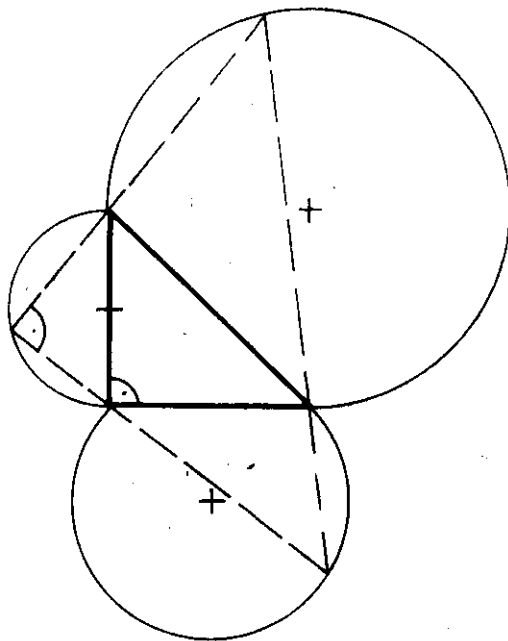
Ez a minimális érték nagyobb, mint amit az első beírásmód mellett kaptunk, tehát az egyenlő szárú derékszögű háromszögbe beírt egyenlő szárú derékszögű háromszög területe legalább $1/5$ része a befogadó háromszög területének, és ezt a legkisebb értéket akkor kapjuk, ha a beírt háromszög derékszögének csúcsa az egyik befogón van, és távolsága az első háromszög derékszög csúcsától $2a/5$ távolságban, ahol a a befogó hossza.

Megjegyzések. 1. A második beírásmód mellett $DA = DB$ szükségessége abból is kiadódik, hogy a $CEDF$ négyszög – a szemben fekvő derékszögei alapján – húrnégyszög, és így $ACD\angle = FCD\angle = FED\angle = 45^\circ$.

2. Előkészíthetjük válaszunkat „a feladat megfordításának elve” alapján is, vagyis hogy rögzített egyenlő szárú derékszögű háromszög köré maximális területű egyenlő szárú derékszögű háromszöget akarunk írni. Ebben a felfogásban az A , B , C csúcsok egy-egy látóöríven mozognak (4–5. ábra). Ajánljuk az érdeklődőknek az ötlet kidolgozását.



4. ábra



5. ábra

3. Gyakori hiba volt – már a versenyen is –, hogy az első beírásmód mellett D , E , F -et az illető oldal egyik harmadoló pontjának vették. Így a terület aránya $2/9 > 2/10 = 1/5$, nem a minimumot kapjuk.