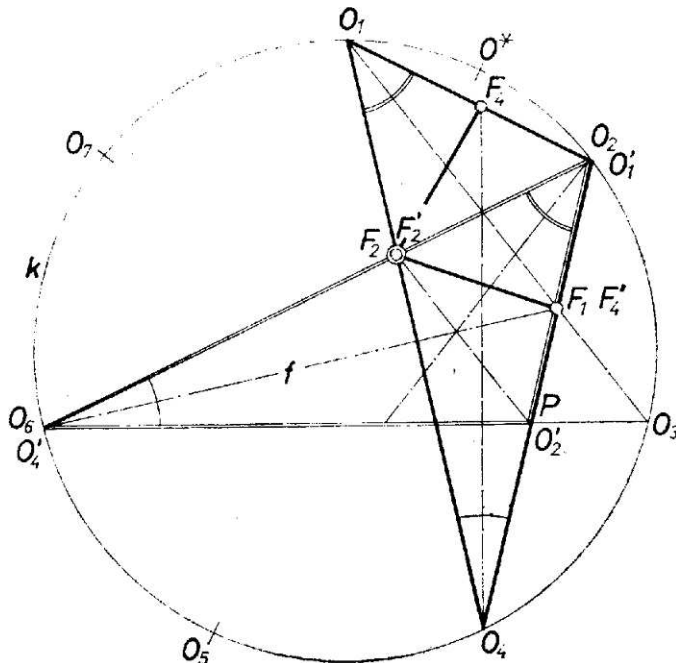


I. megoldás. A k körbe írt $O_1O_2 \dots O_7$ szabályos hétszög csúcsai közül választott $O_1O_2O_4$ háromszög szögeire a kerületi szögek tétele szerint $O_4 \sphericalangle : O_1 \sphericalangle : O_2 \sphericalangle = 1 : 2 : 4$. Jelöljük szögfelezőinek a szemben fekvő oldallal való metszéspontját rendre F_4, F_1, F_2 -vel, F_2 -t nyilván az O_2O_6 húr metszi ki, F_1 -et pedig O_1O_3 .

Mivel még $O_2O_6 = O_1O_4$, azért F_2 az $O_1O_2O_4O_6$ szimmetrikus trapéz átlóinak metszéspontja. Eszerint az $O_1O_4O_2$ háromszög elfordítható F_2 körül úgy, hogy O_1 , O_4 rendre O_2 , O_6 -ba jusson; forduljon egyidejűleg O_2 a P pontba. $O_6O_2P \triangleleft = O_4O_1O_2 \triangleleft = O_6O_2O_4 \triangleleft$, a forgási irányokat is beleértve, ezért P az O_2O_4 húron van, továbbá ugyanígy az O_6O_3 húron is, ezek metszéspontja.

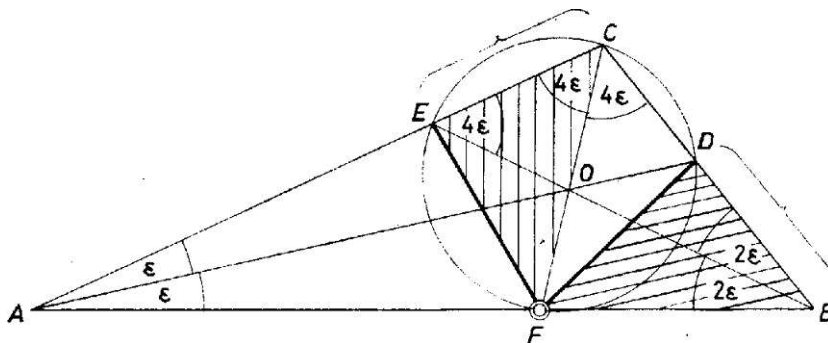


Jelöljük az X pont ilyen forgatottját X' -vel (vagyis $O_1'O_2'O_4' = O_2PO_6$), és tekintsük az F_2', F_4' pontokat. $F_2' = F_2$, helyben maradt. Az $O_6F_4' = f$ felező felezi az O_2O_3 ívet, tehát átmegy k középpontján. Így F_4' azonos F_1 -gyel, egymás tükörképei f -re, hiszen F_4' a PO_2 oldalon, vagyis az O_4O_2 egyenesen van, és ez az O_1O_3 egyenes, az O_1F_1 felező képe. Eszerint $F_2F_1 = F_2'F_4' = F_2F_4$, az $F_2F_1F_4$ háromszög valóban egyenlő szárú.

Szegedy Patrik (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Legyenek az ABC háromszög szögei az adott aránypárok sorrendjében α, β, γ , a csúcsukból induló szögfelezők által a szemben fekvő oldalból kimetszett pontok rendre D (a BC -ből), E és F . Szemlélet és mérés szerint $FD = FE$, ezt bizonyítjuk.

Az arányt visszafelé olvasva $\gamma/2 = \beta$, tehát egyrészt a BCF háromszög egyenlő szárú: $BF = CF$, másrészt $FCA \triangleleft = FBC \triangleleft$; így elég lenne azt belátni, hogy az FBD háromszög ráfordítható az FCE háromszögre. A $CE = BD$ egyenlőséget bizonyítjuk, felhasználva az aránybeli és a szerkesztésbeli felezésekből eredő hasonlóságokat.



Jelöljük a szögfelezők metszéspontját O -val. Tekintsük a hasonló háromszögekből alakított alábbi párokat, alattuk zárójelben az egymás utáni szögek mértékszámait állnak, alkalmi egységnek választva az $\varepsilon = 180^\circ/14$ -et. Írjuk alájuk megfelelő oldalpárjaik arányaiból 2–2-nek az egyenlőségét, szorozzuk össze a bal, valamint a jobb oldalakat és egyszerűsítsünk:

$$BDA \triangle \sim COA \triangle$$

$$CEB \triangle \sim OCB \triangle$$

$$OCB \triangle \sim CBA \triangle$$

$$(4 : 9 : 1)$$

$$(8 : 4 : 2)$$

$$(8 : 4 : 2)$$

$$\frac{BD}{CO} = \frac{BA}{CA},$$

$$\frac{BC}{CE} = \frac{BO}{OC},$$

$$\frac{BO}{AC} = \frac{BC}{AB},$$

$$\frac{BD}{CE} = 1.$$

Ezt akartuk bizonyítani, és ezzel a feladat állítását is bebizonyítottuk.

- Megjegyzések.* 1. A P. 336. problémában adódik, hogy speciális háromszögünkben $CDFE$ húrnégyszög.
2. Sokan trigonometriaival eszközökkel bizonyították az állítást – nagyon hosszan.