

I. megoldás. Legyen egy, a föltevés szerinti ABC háromszög magasságpontja M , körülírt k körének középpontja O , és sugara a hosszúságegység, AB oldalának felezőpontja F , és ezekkel

$$(1) \quad MO = 2 \cdot FO.$$

Vizsgálatunkat annak a szerkesztésnek a szemléletére alapítjuk, amellyel egy, a k -n belül megválasztott F -ből megkapjuk a háromszög csúcsait.

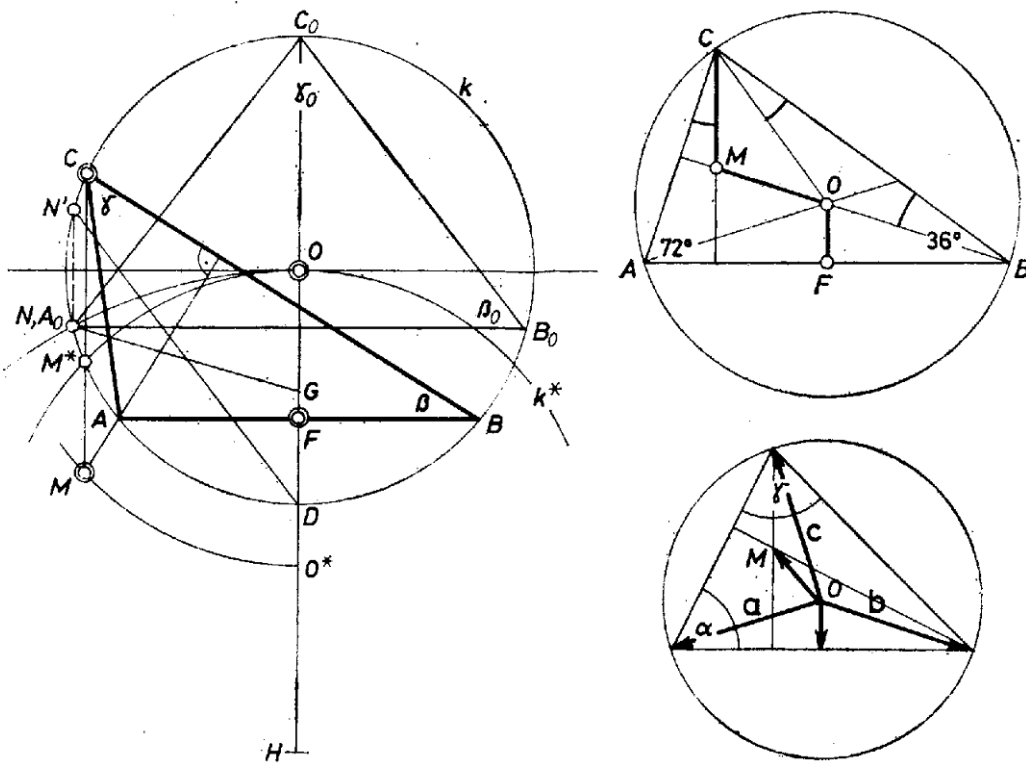
A -t és B -t az OF -re F -ben állított merőleges metszi ki. Legyen O és M tükörképe AB -re O^* , ill. M^* , ismeretes, hogy M^* a k -n keletkezik. Így O , M , M^* és O^* egy szimmetrikus trapéz csúcsai, és (1) felhasználásával

$$O^*M^* = OM = 2 \cdot FO = OO^*.$$

Ennélfogva M^* -ot az O^* középpű, O -n átmenő k^* kör metszi ki k -ból, és az M^* -on át AB -re állított merőlegesnek k -val való második metszéspontja C .

M^* létrejön, ha az O , O^* , M^* pontokra teljesül $OO^* + O^*M^* \geq OM^*$, azaz $4OF \geq 1$, tehát ha $OF \geq 1/4$. A szimmetria alapján elég azt az M^* -ot vennünk, amelyikre $M^*A \leq M^*B$; erre $CA \leq CB$ is teljesül, és a szögek szokásos jelölésével $\beta \leq \alpha$ lesz. Ezért a vizsgálandó legnagyobb szög α vagy γ .

Legyen D a k rögzített pontja, F_0 az OD sugár negyedelő pontja: $OF_0 = OD/4$, és fussa be F az F_0D szakaszt; így O^* a GH szakaszt futja be, ahol G az OD felezőpontja és H az O tükörképe D -re. $DF_0 \geq DF > 0$ mellett minden vizsgálandó háromszöget megkapunk (viszont elfajulna a háromszög, ha D -ben vennénk fel F -et).



1–3. ábra

Az F_0 -ból előálló $A_0B_0C_0$ háromszög szimmetrikus az OD tengelyre – hiszen ekkor $M^* = D$ – és

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma_0}{2} = \frac{F_0A_0}{C_0F_0} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \sqrt{0,6}, \quad \cos \gamma_0 = \frac{1}{4},$$

innen $\gamma_0 = 75,522^\circ$ és $\alpha_0 = 90^\circ - \gamma_0/2 = 52,239^\circ$; itt tehát γ_0 a legnagyobb szög.

Amint F halad D felé, A ugyancsak D felé közeledik a körvonalon, M^* viszont távolodik D -től, mert a $DOM^* \triangleleft O^*OM^* \triangleleft$ nő, hiszen az O^*M^*O háromszög szárai, a k^* sugarai nőnek, OM^* alapja pedig változatlanul 1 egység. Továbbá C távolodik C_0 -tól, hiszen C és M^* egymás tükörképei az OD -re merőleges átmérőre mint tengelyre. – Ezek szerint α növekszik, mert AB iránya állandó, γ viszont a DA ív csökkenésével csökken, hiszen $\gamma = 2 \cdot DCA \triangleleft$.

Könnyű látni, hogy az AC egyenes akkor lépi át az OD -vel párhuzamos helyzetet, amikor F a G -ben, O^* a D -ben van, és ezért A és M^* egybeesnek. Ekkor már $\alpha = 90^\circ$ a legnagyobb szög (és $\gamma = 60^\circ$) és ez is marad.

Amint minden határon túl csökkentjük a DF távolságot, az A csúcs a D határhelyezethez közeledik, O^* a H -hoz, M^* ahhoz az N ponthoz, amelyet a H körüli O -n átmenő kör metsz ki k -ból, végül C az N tükörképéhez, N' -hez. Mármint N éppen A_0 -ban adódik, mert az NHO egyenlő szárú háromszög oldalai rendre 2-szer akkorák, mint az

OA_0G háromszögei, az O közös csúcsuknál levő szögek egyenlők, továbbá OD közös oldalegyenesük, ezért az ON , OA_0 félegyenesek azonosak.

Ezek szerint α -nak felső korlátja a következő érték: $90^\circ + ODN' \triangleleft = 90^\circ + OC_0A_0 \triangleleft = 90^\circ + \frac{\gamma_0}{2} = 127,761^\circ \dots$, és ezt α alulról tetszőleges kis eltéréssel megközelítheti.

Most már csak a legnagyobb szög legkisebb értékét kell meghatároznunk. Kézenfekvő ez a sejtés: akkor adódik ez, amikor egyenlőnek adódik a csökkenőben levő γ és a növekedőben levő α .

Egy szerencsés ötlettel megpróbáltuk a fenti γ_0 és a $\gamma = 60^\circ$ közti $\gamma = 72^\circ$ -ot. Megmutatjuk, hogy az $\alpha = \gamma = 72^\circ$ és $\beta = 36^\circ$ szögekkel bíró (sok érdekességről ismert) háromszögben teljesül (1).

Minden háromszögben érvényes a $CM = 2 \cdot OF$ összefüggés – legutóbb a mostanival rokon F. 2221-ben láttuk ezt, az 1980. évi áprilisi számban (K. M. L. 60. kötet, 148. oldal), ennél fogva elég azt belátni, hogy a mondott szögek esetében $MO = MC$ (2. ábra). Valóban, $MCA \triangleleft = 18^\circ$, $OCB \triangleleft = OBC \triangleleft = 18^\circ$, innen $MCO \triangleleft = 36^\circ$, másrészt $MOC \triangleleft = 1/2 AOC \triangleleft = ABC \triangleleft = 36^\circ$, tehát az OCM háromszög egyenlő szárú.

Mivel így a 72° -os közös érték átlépésekor fordul ellentétesre α és γ nagyságviszonya, ezért az (1) tulajdonságú háromszögekben a legnagyobb szög pontos alsó korlátja 72° . Ezzel befejeztük kérdésünk vizsgálatát.

II. megoldás. Jelöljük a háromszög köré írt kör O középpontjából a csúcsokba mutató vektorokat $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ -vel úgy, hogy $\mathbf{c}$ mutasson abba a csúcsba, amellyel szemben fekvő oldal felezőpontjától vizsgáljuk O távolságát (3. ábra). Ez a távolság $\frac{1}{2} \cdot |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, mert $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

Ismert, hogy az O -ból az M magasságpontba mutató vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ (Euler-egyenes), tehát $OM = |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|$. Ezek szerint a feltétel így írható:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|.$$

Négyzetre emeléssel, $|\mathbf{x}|^2 = (\mathbf{x})^2$ alapján

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ 0 &= r^2 + 2r^2 \cos 2\beta + 2r^2 \cos 2\alpha, \end{aligned}$$

ahol r a körülírt kör sugara, $\mathbf{a}$ az α , $\mathbf{b}$ a β , $\mathbf{c}$ a γ szög csúcsához mutat, és $\mathbf{a}$ -t, $\mathbf{b}$ -t úgy választottuk meg, hogy a $\alpha \geq \beta$. Átrendezéssel az eredeti feltétel

$$-\frac{1}{2} = \cos 2\alpha + \cos 2\beta,$$

és ez így is írható

$$(2) \quad \frac{1}{4} = \cos(\alpha - \beta) \cos \gamma,$$

ugyanis

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

és $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$, és $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Jelölésünk szerint a legnagyobb szög α és γ valamelyike, mindenesetre nagyobb, mint 60° , hiszen szabályos háromszögben nem teljesül a feladat feltétele.

Nem lehet γ tompaszög, mert akkor vele együtt $(\alpha - \beta)$ is tompaszög lenne, hiszen (2) szerint cosinusaik egyező előjelűek. Így

$$\frac{1}{4} \leq \cos \gamma < 1, \quad 75,522^\circ \geq \gamma > 0^\circ$$

($\cos \gamma = 1$ -ből elfajult háromszög adódnék). Minden ilyen érték megoldást ad az

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= \arccos \frac{1}{4 \cos \gamma}, \\ \alpha + \beta &= \pi - \gamma \end{aligned}$$

egyenletrendszer szerint, innen

$$(3) \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4 \cos \gamma},$$

és $\gamma = 0^\circ$ mellett felső korlátot kapunk α -ra:

$$\alpha < \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4},$$

és ez fokban $127,761^\circ$.

Mivel $\cos x$ folytonos függvény és az inverze is az, a jobb oldali értéket α tetszőleges hibahatáron belül megközelítheti, a jobb oldali érték tehát α felső határa.

Másrészt $\cos \gamma = 1/4$ mellett $\alpha = \beta = 52,239^\circ$, ekkor γ a legnagyobb szög, vagyis a feladat feltételében kiemelt szerepű szög.

Azt is látjuk (3)-ból, hogy γ csökkenésével α nő, mert a kivonandó csökken, a hozzáadandó növekszik, – és fordítva. Eszerint abban az esetben lesz minimális a legnagyobb szög értéke, ha $\alpha = \gamma$. Keressük ezt a közös értéket! Írjunk (2)-ben mindkettő helyére $\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right)$ -t:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &= \sin \frac{3\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} = 3 \sin^2 \frac{\beta}{2} - 4 \sin^4 \frac{\beta}{2}, \\ \sin^2 \frac{\beta}{2} &= \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{16} = \left(\frac{\sqrt{5} \pm 1}{4}\right)^2,\end{aligned}$$

tehát $\beta = 36^\circ$ (a másik értékkel β tompaszög lenne) és $\alpha = \gamma = 72^\circ$. Ebből az alakból elmozdulva vagy α növekszik, vagy γ , tehát a legnagyobb szög legkisebb értéke pontosan 72° .

Összegezve: a háromszög legnagyobb szöge $\frac{2\pi}{5}$ és $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}$ (azaz 72° és $127,76^\circ$) között minden értéket fölvehet, az alsó határt beleértve, a felső határt nem.

Megjegyzések. 1. Több olyan háromszög-alaknak is megvan a vizsgált tulajdonsága, amelynek a szögei ún. „nevezetes” szögek: $120^\circ, 45^\circ, \gamma = 15^\circ; 108^\circ, 36^\circ, 36^\circ; 90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ (itt van β minimuma): $\gamma = 75^\circ, 60^\circ, 45^\circ$.

2. A szögeket azért írtuk kétféle (fok, illetve radián) egységben, mert „arc cos” x – és minden arcus-függvény – ívmértékben értendő. A latin arcus szó éppen ívet jelent „árkuspapír”.

3. Természetesen vektorok nélkül is eljuthatunk (2)-re, például az 1980. áprilisi számunk 150. oldalán, az F. 2221. feladat megjegyzésében kimondott

$$\left(\frac{OM}{r}\right)^2 = \begin{cases} 4(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - 3, \\ 9 - 4(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma), \\ 1 - 8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \end{cases}$$

összefüggés és $OF = r \cos \gamma$ alapján. Itt mutatunk rá, hogy az idézett helyen a második kifejezés 4-es tényezője hiányzik.