Mondjuk jónak az $(x_{n-1},\ x_n)$ párt a sorozatban, ha $x_{n-1} \ge x_n$. A jó párok első tagját azok magasságának, második tagjukat a mélységüknek fogjuk nevezni. Addig megyünk előre a sorozatban, amíg a mélység nullára nem süllyed. Közben figyelni fogjuk a magasságok változását, ennek megkönnyítése érdekében kezdetben azt is feltesszük, hogy a mélység 1-nél nagyobb.

Legyen tehát $x_{n-1} \ge x_n > 1$. Ebben az esetben

$$x_{n+1} = x_{n-1} - x_n, \tag{2}$$

és az $(x_n,\ x_{n+1})$ pár akkor lesz újra jó, ha $x_{n-1} \le 2x_n$. Különben

$$x_{n+2} = x_{n+1} - x_n, \tag{3}$$

tehát az $(x_{n+1},\ x_{n+2})$ pár már biztosan jó. Az utóbbi esetben $x_n$-nel, tehát legalább kettővel csökken a pár magassága. Az első esetben $x_{n-1}$ helyett $x_n$ lesz a magasság, az tehát csak akkor marad változatlan, ha közben a mélység nullára csökken.

Amíg tehát a mélység 1 felett marad, addig egy jó párt egy vagy két lépésben ismét jó pár követ, és közben a magasság rendre vagy legalább 1-gyel vagy legalább 2-vel csökken.

Vizsgáljuk meg most azt az esetet, amikor $(x_{n-1},\ x_n)$ ugyan jó pár, de benne $x_n = 1$. Most is igaz (2), és ha $x_{n+1} > 0$, akkor (3) is. Ha itt $x_{n+2} > 0$ is teljesül, akkor érdemes tovább mennünk:

$$x_{n+3} = x_{n+1} - x_{n+2} = x_n,$$

most tehát $(x_{n+2},\ x_{n+3})$ is jó pár, és a magassága 2-vel kisebb $(x_{n-1},\ x_n)$ magasságánál. Ha tehát a mélység 1-gyel egyenlő, ez három lépésben visszatér, és közben a magasság 2-vel csökken (feltéve persze, hogy közben nem értük el a 0-t).

Ezek alapján azt kapjuk, hogy ha $(x_0,\ x_1)$ jó pár, és $(x_n,\ x_{n+1})$ az első olyan jó pár a sorozatban, amelyben $x_{n+1} \le 1$, akkor

$$x_0 \ge x_n + n.$$

Ha $x_{n+1} = 0$, akkor $n < x_0 < 1000$ miatt készen is vagyunk, különben pedig $x_n = 2k + \varepsilon,\ \varepsilon \le 1$. Mint láttuk, most $3k$ lépésben a magasság $\varepsilon$-ra csökken, tehát legkésőbb $1 + (3k + \varepsilon)$ lépésben elérjük a nullát. Mivel

$$n + 3k + \varepsilon \le n + \frac{3}{2}(2k + \varepsilon) \le \frac{3}{2}(n + x_n) \le \frac{3}{2}x_0 < 1499,$$

ebben az esetben igaz a feladat állítása.

Vizsgáljuk meg végül azt az esetet, amikor $x_0 < x_1$, vagyis $(x_0,\ x_1)$ nem jó pár. Ekkor ugyan $x_2 = x_1 - x_0$ miatt már $(x_1,\ x_2)$ jó pár lesz, tehát legfeljebb egy lépést veszthetünk, ez azonban éppen elegendő ahhoz, hogy a feladat állítása már ne legyen igaz, mint ahogy azt az $x_0 = 998,\ x_1 = 999$ eset mutatja, amikor is $x_{1500}$ az első, nullával egyenlő tag a sorozatban. A feladat állítása tehát csak úgy igaz, ha benne az „1500-adik tag előtt” helyett „legkésőbb $x_{1500}$-ig”-et mondunk.

*Umann Gábor* (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)