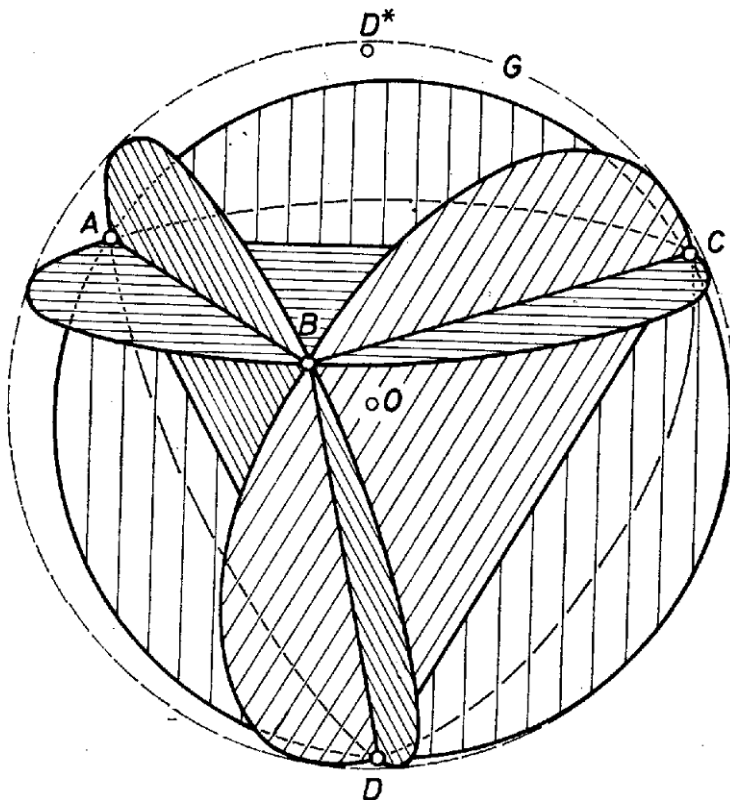


Egyszerűbben írható le a feladat tárgya az alábbi észrevétel alapján. Az $ABCD$ szabályos tetraéder DD' magasság-szakaszának felező merőleges síkja azonos az ABC sík tükörképével a körülírt gömb O középpontjára nézve. Valóban, szabályos tetraéderben O azonos az S súlyponttal. D' azonos az ABC szabályos háromszög lap körülírt körének középpontjával. Így a DD' szakasz tetraéderünknek egyben súlyvonala is, és rajta S (egyben O) a D' -höz közelebbi negyedelőpont, tehát D' -nek – ami az ABC síkon van – O -ra való tükörképe felezi a DD' magasságot.



Könnyű ebből belátni, hogy a körülírt G gömb felületén az előírt síkok által létrehozott részek szintén O -ra való tükörképei azoknak a részeknek, amelyekre G felületét az ABC , ABD , ACD és BCD lapsíkokkal kimetszett kiskörök feldarabolják. Elég tehát az utóbbi felosztás részeinek felszínével foglalkoznunk, illetve a mondott kétféle felületrész arányával.

Az ABC lapsík által kimetszett k_1 kör két gömbsüvegre vágja szét G felületét. A D -t tartalmazó süveg magassága $DO + OD' = 4r/3$, tehát a másiké $D^*D' = D^*O - OD' = r - r/3 = 2r/3$, itt D^* a G -nek D -vel átellenes pontja. Így a süvegek felszínei $2G/3$, illetve $G/3$, ahol G most a gömb felszínét jelöli, hiszen a gömbsüveg felszíne arányos a magasságával. (Nem származhat félreértés a jel kétféle jelentéseiből.)

Az A , B , C pontok 3 egyenlő ívre osztják k_1 -et. A többi 3 lapsík által kimetszett köröknek 1 – 1 ívük esik a fenti kisebb gömbsüvegbe, az ABD sík által kimetszett k_2 kör íve A és B között létesít új összeköttetést, a továbbiak B és C , illetve C és A között. Nincs közös pontjuk a kis gömbsüveg belsejében, hiszen mindegyiknek a teljes köre lent átmegy D -n, és ezért legmagasabb pontjuk felé haladva távolodunk D^* -tól. (Úgy tartjuk G -t, hogy felső pontja D^* .)

Eszerint a kis gömbsüveg 4 részre van felosztva, ebből 3-at 2 – 2 körív határol – pl. egyet A és B két összekötése –, és ez a 3 „kétcsúcsú rész” egybevágó. A negyedik részt 3 körív határolja, ez a háromcsúcsú ABC felületi rész.

Ugyanígy mindegyik lapsík által lemetszett kisebbik gömbsüveg 3 kétcsúcsú és 1 háromcsúcsú felületi részre oszlik, pl. az ABD sík által az AB , BD és DA kétcsúcsúak (az elsőt már másodszor látjuk) és az ABD háromcsúcsú rész és az egyező típusú részek egybevágók. Ezek szerint a test mindegyik éléhez hozzárendelhető egy kétcsúcsú rész és mindegyik lapjához egy háromcsúcsú, tehát számuk G egész felületén 6, illetve 4. Erről a kétféle részről szól a bizonyítandó állítás.

Látjuk most már, hogy a k_1 által létrejött nagyobbik gömbsüveg (az alsó) ugyancsak 3 kétcsúcsúra, továbbá 3 háromcsúcsúra darabolódott fel. Így a többlete a kisebbikhez képest éppen 2 háromcsúcsúnak a felszínével egyenlő:

$$\frac{2G}{3} - \frac{G}{3} = 2F_3, \quad F_3 = \frac{G}{6}.$$

Ezzel megkaptuk a háromcsúcsú felületrész F_3 felszínét.

Így a háromcsúcsúak együttes felszíne $\frac{4G}{6}$, és a hátra levő $\frac{G}{3}$ oszlik el a 6 kétcsúcsúra: $F_2 = \frac{G}{18}$, ami pedig $\frac{F_3}{3}$, éppen ezt kellett bizonyítanunk.