

Bizonyítsuk be, hogy az első 1024 pozitív egész számot szét lehet osztani két, egyenként 512 elemet tartalmazó $(x_1, x_2, \dots, x_{512})$ és $(y_1, y_2, \dots, y_{512})$ részre úgy, hogy minden $j < 10$ természetes számra fennálljon a következő egyenlőség:

$$(1) \quad x_1^j + x_2^j + \dots + x_{512}^j = y_1^j + y_2^j + \dots + y_{512}^j.$$

I. megoldás. Kényelmesebb lesz az első 1024 nem negatív egész számra bizonyítani a feladat állítását. Ebből következni fog az eredeti állítás, hiszen ha valamilyen $(x_i, y_i, i = 1, 2, \dots, 512)$ számokra minden $j < 10$ mellett fennáll (1), akkor az

$$(2) \quad \bar{x}_i = x_i + 1, \quad \bar{y}_i = y_i + 1, \quad i = 1, 2, \dots, 512$$

számokra is érvényes (1) minden $j < 10$ mellett. Az $\bar{x}_i^j, \bar{y}_i^j$ hatványok közül ugyanis az első például a j tényező

$$(x_i + 1)(x_i + 1) \dots (x_i + 1)$$

szorzattal egyenlő. Ha ebben minden tagot minden taggal megszorozunk, összesen 2^j szorzatot kapunk, hiszen mindegyik tényezőben két tag között választhatunk: vagy az x_i -t választjuk, vagy az 1-et. A kapott szorzatok mindegyike x_i^k alakú, ahol k azoknak a tényezőknek a száma, amelyekben az x_i -t választottuk. Így tehát $k \leq j < 10$, és emiatt a kapott szorzatok mindegyikére külön-külön alkalmazva (1)-et, j helyett a k kitevőre azt kapjuk, hogy (1) az x_i -k, y_i -k helyett az $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ számokra is teljesül.

Írjuk fel az első 1024 nem negatív egészet a kettes alapú számrendszerben, és aszerint osszuk őket két részre, hogy ebben az alakjukban a számjegyek összege páros-e vagy páratlan. Mivel 1024 a 2-nek éppen 10-edik hatványa, a számaink mind

$$(3) \quad 2^9 e_9 + 2^8 e_8 + \dots + e_0$$

alakúak, ahol az e_k számjegyek mindegyike 0 vagy 1. Megfordítva, minden ilyen alakú szám megtalálható a két rész valamelyikében aszerint, hogy az

$$e_9 + e_8 + \dots + e_0$$

összeg páros-e vagy sem.

Ha egy (3) alakú számnak ki akarjuk számolni a j -edik hatványát, most j tényező szorzatot kell kiszámítanunk, de a

$$(4) \quad (2^9 e_9 + 2^8 e_8 + \dots + e_0) \cdot (2^9 e_9 + 2^8 e_8 + \dots + e_0) \dots (2^9 e_9 + 2^8 e_8 + \dots + e_0)$$

szorzatban a kifejtés után már 10^j részeredmény van, hiszen most mindegyik tényezőben 10 lehetőség közül választhatunk. Mindegyik részeredményben a 10 számjegy közül néhány szerepel, mégpedig $j < 10$ miatt biztosan 10-nél kevesebb. Minden konkrét számra egy adott típusú részeredmény akkor és csakis akkor lesz 0-tól különböző, ha az érintett számjegyek egyike sem 0. Mivel pedig a nem érintett számjegyek ezekkel együtt pontosan ugyanannyiszor adnak páros összeget, mint páratlant, pontosan ugyanannyiszor kapunk mindkét részben 0-tól különböző részeredményt. Végül amiatt, hogy ezek értéke független a számjegyek összegének paritásától, a mondott felosztásra (1) valóban teljesül.

II. megoldás. Legyen n tetszőleges pozitív egész, és legyen $m = 2^n$. Az n számra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy a következő állítás n -nek minden szóba jövő értékére teljesül:

Az első $2^{n+1} (= 2m)$ pozitív egész számot szét lehet osztani két, egyenként m elemet tartalmazó $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ és $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ csoportba úgy, hogy minden, legfeljebb n -edfokú $p(x)$ polinomra fennálljon a

$$p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_m) = p(y_1) + p(y_2) + \dots + p(y_m)$$

egyenlőség.

Ha ezt az állítást bizonyítottuk, ebből a feladat állítása már azonnal következik. Válasszuk ugyanis n -et kilencnek, a $p(x)$ polinom helyére pedig tegyük az $1, x, x^2, \dots, x^9$ polinomokat; az így kapott egyenlőségek adják a feladat állítását.

Most rátérünk az általunk kimondott tétel bizonyítására. Elsőként az $n = 1$ esettel foglalkozunk. Állítjuk, hogy az 1, 2, 3, 4 számoknak az $x_1 = 1, x_2 = 4, y_1 = 2, y_2 = 3$ felosztása megfelel. Valóban, minden, legfeljebb elsőfokú polinom $p(x) = ax + b$ alakú (ahol $a = 0$ is lehetséges), és ekkor

$$p(1) + p(4) = 5a + 2b = p(2) + p(3)$$

ahogyan kívántuk.

Másodszor tegyük fel, hogy $n \geq 1$ -re az $1, 2, \dots, 2m$ számoknak az $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ és $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ felosztása megfelelő. Osszuk fel az első $4m$ pozitív egész számot a következő módon:

$$(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1 + 2m, y_2 + 2m, \dots, y_m + 2m),$$

illetve

$$(y_1, y_2, \dots, y_m, x_1 + 2m, x_2 + 2m, \dots, x_m + 2m),$$

Állítjuk, hogy ez a felosztás jó lesz $(n + 1)$ -re. Legyen $p(x)$ egy tetszőleges, legfeljebb $(n + 1)$ -edfokú polinom. A $q(x) = p(x + 2m) - p(x)$ polinom legfeljebb n -edfokú, hiszen a jobb oldalon a legmagasabb fokú tag együtthatója 0. Így alkalmazhatjuk indukciós feltevésünket a $q(x)$ polinomra, tehát a következő egyenlőség fennáll:

$$q(x_1) + q(x_2) + \dots + q(x_m) = q(y_1) + q(y_2) + \dots + q(y_m).$$

Ebből $q(x_i) = p(x_i + 2m) - p(x_i)$ és $q(y_i) = p(y_i + 2m) - p(y_i)$ alapján átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} p(x_1) + \dots + p(x_m) + p(y_1 + 2m) + \dots + p(y_m + 2m) = \\ = p(y_1) + \dots + p(y_m) + p(x_1 + 2m) + \dots + p(x_m + 2m). \end{aligned}$$

Mivel p tetszőleges, legfeljebb $(n + 1)$ -edfokú polinom volt, ez éppen tételünk érvényességét bizonyítja $(n + 1)$ -re.

A teljes indukció elve alapján tehát a tétel minden n -re érvényes, ezzel a bizonyítást befejeztük.