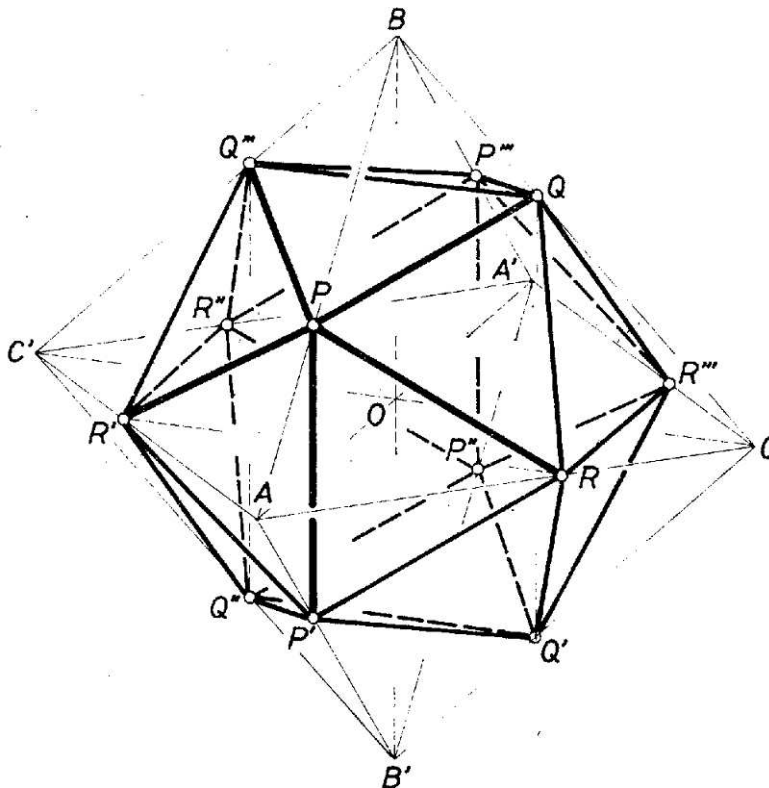


Jelöljük a szabályos oktaéder középpontját O -val, egy lapjának csúcsait A, B, C betűvel, így a hátra levő 3 csúcs az utóbbiaknak O -ra való A', B', C' tükörképe. Legyen P az AB él kijelölt pontja úgy, hogy $PA : PB = 1 : (\sqrt{5} + 1) / 2$ – röviden $1 : k$, vagyis $k > 1$ –, tehát PA az él kisebbik része, PB a nagyobbik rész.

Alkalmazzuk a váltakozás követelményét egyelőre A -ban és B -ben a C felé irányuló élek R , ill. Q osztópontjára, ez a két él C -ből nézve szomszédos. És mivel A és B miatt QB -t kisebbnek, RA -t a nagyobb résznek kell választanunk, ami által CQ a nagyobb rész lesz, CP pedig a kisebb, és ezek különbözők, nem jutottunk ellentmondásba a kiválasztás elvével.



Áttérve a szomszédos ACB' lapra, az AB' élen az A -hoz közelebbi P' osztópont kijelölése esedékes, az pedig éppen P tükörképe az oktaéder $OAC = S_b$ szimmetriasíkjára, ahogyan az ACB' lap ugyanilyen képe az ACB lapnak. Hasonlóan a CB' élen C körüljárása szerint kijelölendő Q' pontra $Q'C > Q'B'$, tehát Q' a Q képe S_b -re. Így A és C körüljárásában immár 3–3 élen teljesítettük a váltakozást.

Az AC' élen az A -tól távolabbi R' pontot választva, A körüljárása az előírás szerint záródik, hiszen A -ban 4 lap, 4 él fut össze, és a 4 páros szám. R' az R képe az $OAB = S_c$ síkra. Hasonlóan a B, C, B', C' csúcsokban 3–3 egymás utáni élre lesz helyes a körüljárás, ha $C'B'$ -n és $C'B$ -n a Q' -nek, ill. Q -nak S_c -re való Q'', Q''' képét választjuk. Végül az A körüli P, R, P', R' pontnégyesnek az $OBC = S_a$ síkra való tükörképét véve, minden csúcs körül megfelel a kiválasztás, és ezzel beláttuk az a) állítás helyességét. – Bizonyításunk egyrészt az oktaéder egyes szimmetriáin alapult, másrészt azon a tényen, hogy az oktaédercsúcsokból kifutó élek 4-es létszáma osztható a kiválasztási elvben előírt ismétlődés 2-es periódusával.

2. Az oktaéder további szimmetriái alapján adódik, hogy a kiválasztott 12 pont bármelyike átvihető bármelyik másikba úgy, hogy egyidejűen minden egyes kijelölt pont kijelölt pontba jusson. Valóban: bármelyik oktaédercsúcs átvihető bármelyik másikba (a mondott további követelménnyel, többféleképpen is), és ha egyidejűen pontegyüttesünk nem önmagába ment át, akkor egy 90° -os elfordítás eredményezi ezt. – Eszerint pontjaink egy O körüli gömbön vannak rajta.

Megmutatjuk, hogy P -től 5 másik kiválasztott pont van egyenlő távolságra, ahogy a szabályos ikozaéder minden csúcsával 5 másik csúcs szomszédos, és együtt 5 szabályos háromszöget alkotnak. A PQR háromszög nyilvánvalóan szabályos, és hosszegységnek választva AP -t, oldalára a cosinustétel szerint

$$PQ = \sqrt{l + k^2 - k} = \sqrt{2} = PR.$$

Ugyanakkora az ABC' háromszögből PQ''' és PR' is, továbbá PP' is, hiszen az $ABA'B'$ metszet négyzet, és így APP' egyenlő szárú derékszögű háromszög, egységnyi befogókkal.

Ezek szerint P', R, Q, Q''' és R' egy a P körüli gömbön is rajta vannak. Két (nem koncentrikus) gömb közös pontjai – ha vannak – egy körön vannak, vagyis egy síkban, eszerint $P'RQQ'''R'$ síkbeli ötszög. Másrészt oldalai is egyenlőek a fentiek szerint, tehát PO mint tengely körüli 72° -os elfordításokkal az ötszög csúcsai ciklikusan egymásba mennek át.

Ugyanez a pontegyüttes bármelyik pontjára is érvényes. Jelöljük a háromszöglapok számát h -val, és építsük össze a test modelljét csupa különálló szabályos háromszögből. A h db lapon eredetileg $3h$ csúcs van, az 5-ösével való összeragasztás után $3h/5$, és ez egyenlő 12-vel, kijelölt pontjaink létszámával; innen $h = 20$, tehát a test valóban szabályos ikozaéder. – A meghatározást úgy értettük, hogy a 12 pont együttesének konvex burka az ikozaéder.