

A bizonyítandó állítást két részre bontjuk. Először belátjuk, hogy a sorozatnak nincs $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ -nél kisebb tagja, azaz $x_i \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

A feltételek szerint $x_1 = n > \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, továbbá

$$x_{i+1} = \left\lfloor \frac{x_i + \left\lfloor \frac{n}{x_i} \right\rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x_i + \frac{n}{x_i}}{2} \right\rfloor.$$

Itt felhasználtuk azt, hogy x_i egész, így ha a számlálót egy 1-nél kisebb pozitív számmal $\left(\frac{n}{x_i}$ törtrészeivel) növeljük, a tört egész része nem változik. Az x_i pozitív, így alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{x_i + \frac{n}{x_i}}{2} \geq \sqrt{x_i \cdot \frac{n}{x_i}} = \sqrt{n},$$

amiből az $x_{i+1} \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ állítást kapjuk, hiszen ha $a \geq b$, akkor $\lfloor a \rfloor \geq \lfloor b \rfloor$.

A bizonyítás második lépéseként belátjuk, hogy $x_i > \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ esetén $x_{i+1} < x_i$. Ekkor ugyanis $x_i \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 > \sqrt{n}$, tehát $x_i > \left\lfloor \frac{n}{x_i} \right\rfloor$. Ezt x_{i+1} definiáló összefüggésével egybevetve

$$x_{i+1} = \left\lfloor \frac{x_i + \left\lfloor \frac{n}{x_i} \right\rfloor}{2} \right\rfloor < x_i.$$

Tehát a sorozat mindaddig szigorúan monoton csökken, míg $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ -et nem éri el. Mivel egész számokból áll, ez legfeljebb $n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ lépésben bekövetkezik.

(K. M.)

Csikós Zsolt (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)