

Jelöljük az AB , BC , CD , DA , AC szakaszok hosszát rendre a -val, b -vel, c -vel, d -vel, e -vel. Az $ABCD$ négyszög akkor és csakis akkor érintőnégyszög, ha $a + c = b + d$, vagyis az $a - b$ és $d - c$ különbségek egyenlőek. Jelöljük ezek közös értékét k -val; mivel a , b adott, k -t is ismerjük:

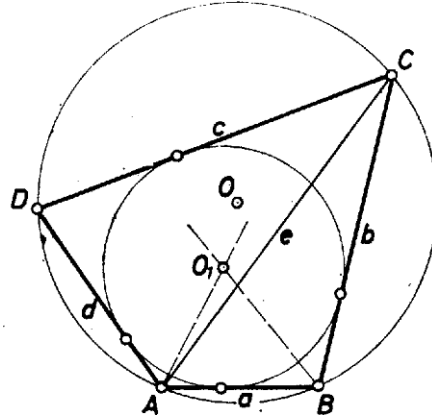
$$(1) \quad a - b = d - c = k.$$

Ez tehát annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy $ABCD$ érintőnégyszög legyen.

Az $ABCD$ négyszög akkor és csakis akkor húrnégyszög, ha az ABC , ADC háromszögek B -nél, D -nél levő szögei egymást 180° -ra egészítik ki. Ez viszont pontosan akkor teljesül, ha a két szög koszinuszának az összege 0:

$$(2) \quad \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab} + \frac{c^2 + d^2 - e^2}{2cd} = 0.$$

Ha tehát találunk olyan c , d mennyiségeket, amelyekre teljesül (1) és (2), azokkal megfelelő négyszög szerkeszthető, és a keresett négyszög oldalaira ezek az egyenletek biztosan teljesülnek.



Az $x_1 = c$ és $x_2 = -d$ ismeretlenek összege (1) szerint $-k$, és az $s = x_1 x_2$ szorzatukra (2) szerint

$$(k^2 - 2s - e^2)ab = s(a^2 + b^2 - e^2)$$

teljesül, vagyis

$$(3) \quad s = ab \frac{(a - b)^2 - e^2}{(a + b)^2 - e^2}.$$

Mivel a , b , e egy háromszög oldalai, így $|a - b| < e < a + b$, tehát (3) jobb oldalán a tört számlálója negatív, nevezője pozitív. Emiatt az

$$x^2 + kx + s = 0$$

egyenletnek mindig két valós gyöke van, és közülük az egyik pozitív, a másik negatív. Esetünkben a pozitív gyök csak $x_1 = c$, a negatív gyök csak $x_2 = -d$ lehet, tehát

$$c = -\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - s}, \quad d = +\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - s},$$

ahol k értékét (1), s értékét (3) határozza meg. Mivel ezekre a mennyiségekre teljesül (1) és (2), a feladatnak mindig pontosan egy megoldása van.

A mondott számok mellett $k = -20$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{2}\right)^2 - s &= 100 - 20 \cdot 40 \cdot \frac{20^2 - 49^2}{60^2 - 49^2} = 1435,1125, \\ c &= 10 + 37,88 = 47,88, \quad d = -10 + 37,88 = 27,88. \end{aligned}$$