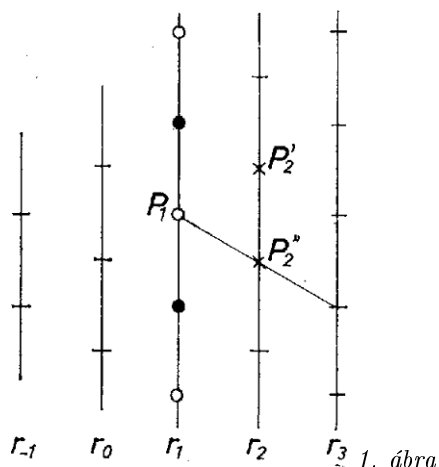


I. megoldás. Tartsuk úgy a rácsot – vagyis a síkját –, hogy két szomszédos (egymástól legkisebb távolságra levő) rácspont összekötő szakasza függőlegesen álljon. Így minden rácspont fölött és alatt d távolságban rácspont lesz, hiszen a rács szabályossága alapján eltolható önmagán úgy, hogy tetszőleges A rácspont átjusson egy kiszemelt B rácspontba, egyúttal minden más rácspont is rácspontba. Továbbá így minden rácspont beletartozik egy és csakis egy r függőleges rácsegyenesbe és két szomszédos ilyen r távolsága $d\sqrt{3}/2$.

Másfelől minden, rácspontokból alakuló, d oldalú szabályos háromszögnek egy oldala függőlegesen áll. Eleget teszünk tehát az előírt kizárásnak, ha minden r egymás utáni pontjait váltakozva, mondjuk, fehérre és feketére festjük (köröcske, ill. gombóc, 1. ábra).

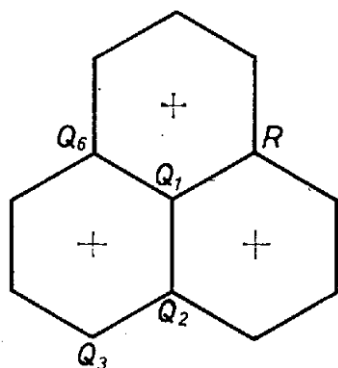


1. ábra

Ezen az úton végtelen sokféle színezését kapjuk a sík rácspontjainak, vagyis a különböző színezések száma tetszőleges N számnál nagyobb. Gondoljuk ugyanis, hogy egy r_1 -et már kifestettünk elvünk szerint, és ennek egy fehér pontja P_1 . A jobb szomszéd r_2 -n az első fehér kört, P_2 -t lényegében 2-féleképpen választhatjuk: P_1 -től jobbra fölfelé d -nyire vagy jobbra lefelé. És amint továbbhaladunk a jobbra következő $r_3, r_4, \dots$ -re, ez az alternatíva megismétlődik. Az r_1 -től r_n -ig terjedő r -ek halmaza 2^{n-1} -féleképpen színezhető, és $2^{n-1} > N$, mihamint $n > 1 + \log_2 N$. Természetesen ugyanezek érvényesek r_1 -től balra az $r_0, r_{-1}, \dots$ függőleges rácsegyenesekre.

(B. T.)

II. megoldás. Egy tetszőleges P rácspontra úgy zárhatjuk ki, hogy csúcsa lehessen egy „tiltott színezésű” háromszögnek, ha a körülötte álló 6 rácspontot – amelyek egy d oldalú $Q_1 Q_2 \dots Q_6 = H$ szabályos hatszög csúcsai – a körüljárás szerint váltakozva fehérre és feketére festjük. Ezáltal már H csúcsai sem tartozhatnak tiltott típusú háromszög csúcsai közé (2. ábra).



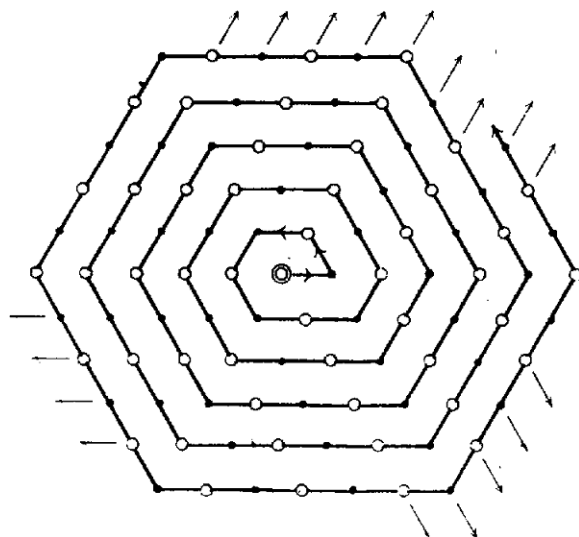
2. ábra

Tükrözzük most H színezését mind a 6 oldalegyenesére mint tengelyre (nyilvánvalóan minden Q -nak a képe rácspont). Nincs ellentmondás ebben a színezésben. Ehhez elég belátni, hogy a Q_1 -gyel szomszédos, H -ba nem tartozó R képpont színe egyértelmű. Valóban, R egyrészt Q_6 képe a $Q_1 Q_2$ tengelyre, másrészt Q_2 képe a $Q_1 Q_6$ -ra, és Q_6, Q_2 egyaránt ellentétes színűek a Q_1 -gyel.

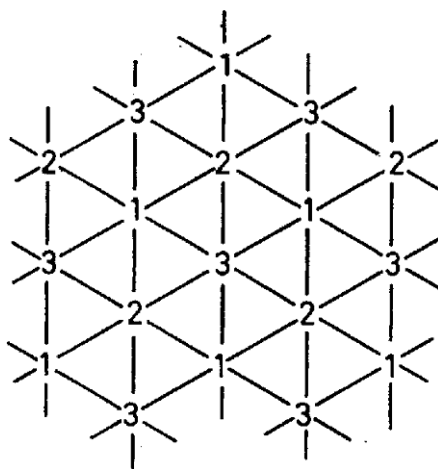
Eszerint a tükrözés ellentmondásmentesen folytatható minden határon túl. Pontosabban: H első 6 képét tükrözzük a „szabad” oldalaira, és így tovább. Ezáltal a rács pontjai két osztályba rendeződnek: hatszögkerületi pontokra – ezek színezése egyértelműen adódik H -éből –, másrészt hatszögcentrumokra. Ez utóbbiak színéről minden hatszögben a többi centrumok színezésétől függetlenül dönthetünk. Nyilvánvaló, hogy így ismét végtelen sokféle színezést kaphatunk a rácsra. Például legyen P fehér, és határozzuk el, hogy még pontosan 1 hatszögcentrumot festünk fehérre, a többi feketére; a P -től különböző fehér centrum végtelen sokféleképpen választható.

(B. T.)

Megjegyzések: 1. Tulajdonképpen egy rögzített rácsot színeztünk. De az is adódik a mondottakból, hogy megválaszthatók a hatszögcentrumok színei úgy is, hogy a kiszínezett rács semmiféle eltolással ne mehessen át önmagába. Gondolja át az olvasó ezt: a centrumokat változó színekkel festjük a 3. ábra P -ből induló menetvonalja szerint; hatszög területén levő rácspontot itt nem tüntettünk fel. (Ez nem a feladatbeli állítás bizonyítása, hanem egy önmagába eltolhatatlan színezés.)



3. ábra



4. ábra

2. Kerüljük meg a feladat követelményét! Könnyű három színnel úgy kiszínezni a rácsot, hogy minden szemében (háromszögében) *mindhárom szín* szerepeljen (pl. a 4. ábra). Egy ilyen színezésből úgy kapunk számunkra megfelelő konstrukciót, hogy a harmadik színt tetszés szerint hol az elsőre, hol a másodikra változtatjuk.

3. Későbbi olvasóink számára megjegyezzük, hogy feladatunk *Turán Tamás*nak a K. M. L. 59 (1979) 199–204. oldalain megjelent, A sík és a tér színezései című cikkéhez kapcsolódik.