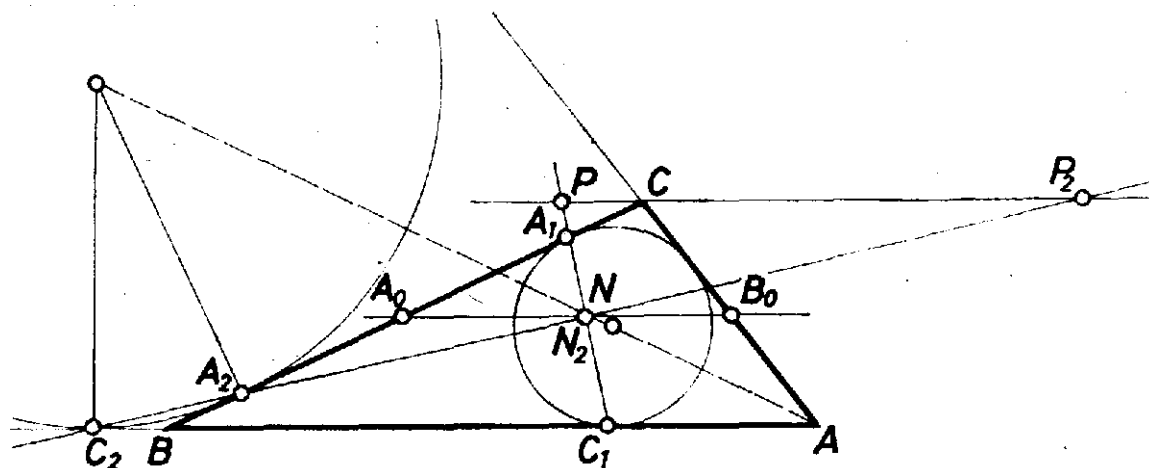


Legyen a beírt kör érintési pontja a BC , BA oldalon A_1 , illetve C_1 , a BC , AC oldalszakasz felezőpontja A_0 , illetve B_0 , továbbá az A_1C_1 és A_0B_0 egyenesek metszéspontja N . Azt mutatjuk meg a feladat állításának bizonyításául, hogy az AN egyenes azonos az A -beli belső szögfelezővel.



1. ábra

Messe A_1C_1 a C -n átmenő, AB -vel párhuzamos egyenest P -ben (1. ábra). Ekkor egyrészt a PCA_1 és C_1BA_1 háromszögek centrálisan hasonlóak az A_1 centrumra, mert A_1 -en megy át 2–2 oldalegyenesük, a harmadik pár pedig párhuzamos. Ebből $A_1B = C_1B$ alapján, felhasználva az érintőszakaszra ismert kifejezést:

$$PC = A_1C = s - AB, \quad (2s = AB + BC + CA).$$

Másrészt a $PCAC_1$ négyszög trapéz, és ebben a középvonalra

$$NB_0 = \frac{1}{2}(AC_1 + PC) = \frac{(s - BC) + (s - AB)}{2} = \frac{AC}{2} = AB_0.$$

Eszerint az NAB_0 háromszög egyenlő szárú, tehát

$$\angle CAN < \angle B_0AN < \angle B_0NA < \angle BAN <$$

ezt akartuk bizonyítani.

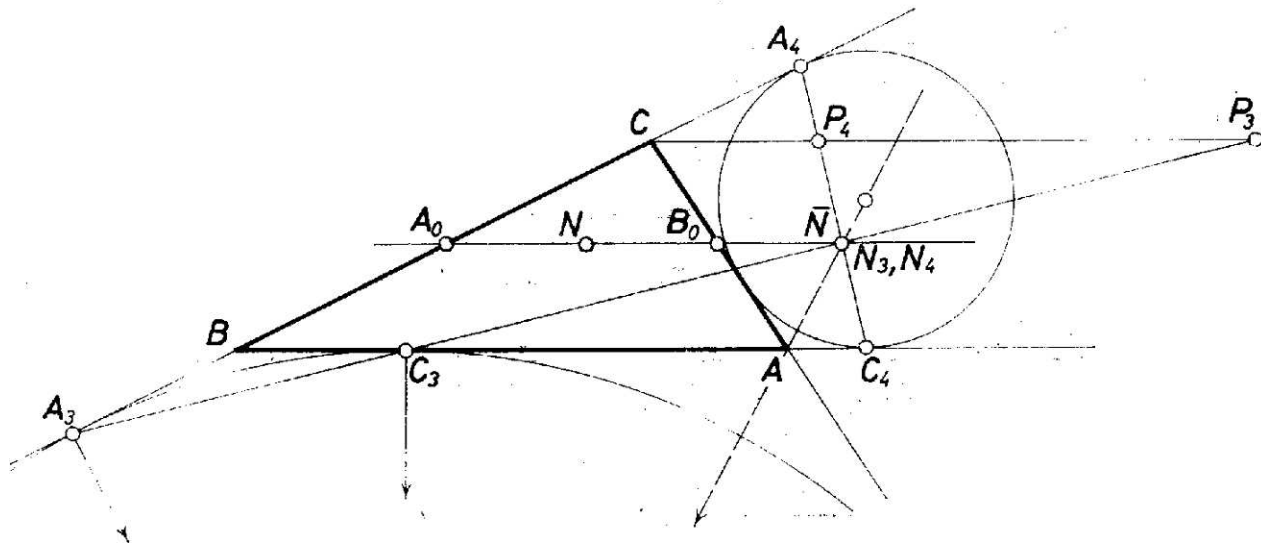
2. Vegyük a beírt kör helyére először a BC oldalhoz kívülről hozzáírt kört, vagyis amelyik az AB és AC félegyeneseket érinti, éspedig AB -t C_2 -ben – ahol, mint ismeretes, $AC_2 = s -$, a BC oldalt pedig A_2 -ben. Az ábra szerint az A_2C_2 egyenes szintén átmegy az előbbi N ponton, tehát a feladat állítása érvényes, ha A_1C_1 helyére A_2C_2 -t vesszük.

Valóban, P helyére véve a PC egyenesből az A_2C_2 által kimetszett P_2 pontot, a P_2CA_2 és C_2BA_2 hasonló helyzetű háromszögek A_2 -re mint centrumra, egyenlő szárúak, így $P_2C = CA_2 = CB - BA_2 = CB - BC_2 = CB - (s - AB) = s - AC$. Másrészt a C_2A_2 , azaz C_2P_2 egyenes szétválasztja az A , C csúcsokat, így P_2CAC_2 hurkolt trapéz, P_2C_2 szárának felezőpontját N_2 -vel jelölve, középvonalára, vagyis a szárak felezőpontjai közti irányított távolságra

$$N_2B_0 = \frac{1}{2}(AC_2 - P_2C) = \frac{s}{2} - \frac{1}{2}(s - AC) = \frac{AC}{2} = NB_0,$$

ezzel igazoltuk meglátásunk helyességét.

3. Hasonlóan lehet belátni, hogy az AB és az AC oldalhoz hozzáírt körök értelemszerűen veendő A_3C_3 , illetve A_4C_4 szelői ugyanabban az N pontban metszik az A_0B_0 egyenest, és hogy az NA egyenes azonos az ABC háromszög A -nál levő *külső* szögeinek közös felező egyenesével (ez a két szög egymásnak csúcsszőge, 2. ábra).



Mindezek szerint kimondhatjuk:

kiválasztva egyrészt bármelyiket az ABC háromszög mindhárom oldalegyenesét érintő 4 kör közül, véve rajta a BA és BC egyenesekkel való érintési pontot, majd e két pont összekötő egyenesét, véve másrészt a háromszög BA oldalával párhuzamos középvonalának egyenesét, e két egyenes metszéspontját az A csúccsal összekötő egyenes átmegy a választott kör középpontján.

Megjegyzés. Számos megoldó trigonometriai vagy koordináta–geometriai elemeket használt fel a bizonyításban.