

Tegyük fel, hogy már n -szer végrehajtottuk a feladatban leírt eljárást. Legyen ekkor a_n liter bor abban az edényben, amely eredetileg csak bort tartalmazott. Vizsgáljuk meg, hogy a következő át-, majd visszaöntés hogyan változtatja meg ezt a mennyiséget.

A feltételek értelmében az átöntéskor $\frac{a_n}{10}$ liter bor kerül a másik edénybe, ahol már $1 - a_n$ liter bor volt, s így most $1 - 0,9 a_n$ liter lett. A visszaöntéskor ennek $\frac{1}{11}$ része kerül vissza az ottmaradt $0,9 a_n$ liter borhoz, ezért $0,9 a_n + \frac{1 - 0,9 a_n}{11}$ liter bor lesz az első edényben. Ez nem más, mint a_{n+1} , így

$$(1) \quad a_{n+1} = \frac{9}{11}a_n + \frac{1}{11}.$$

Feladatunk tehát az, hogy ezzel a rekurziós formulával és az $a_0 = 1$ kezdőtaggal megadott végtelen sorozatnak a határértékét – ha létezik – kiszámítsuk.

Próbáljuk az n -edik tagot zárt alakban felírni. Az (1) formula ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{9}{11} + \frac{1}{11} \\ a_2 &= \left(\frac{9}{11}\right)^2 + \frac{9}{11} \cdot \frac{1}{11} + \frac{1}{11} \\ a_3 &= \left(\frac{9}{11}\right)^3 + \left(\frac{9}{11}\right)^2 \cdot \frac{1}{11} + \frac{9}{11} \cdot \frac{1}{11} + \frac{1}{11} \\ &\vdots \\ a_n &= \left(\frac{9}{11}\right)^n + \left[\left(\frac{9}{11}\right)^{n-1} + \left(\frac{9}{11}\right)^{n-2} + \dots + \frac{9}{11} + 1\right] \cdot \frac{1}{11}. \end{aligned}$$

A szögletes zárójelen belül mértani sor áll, melynek összege $\frac{1 - \left(\frac{9}{11}\right)^n}{1 - \frac{9}{11}}$. Ennek alapján $a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{11}\right)^n + \frac{1}{2}$. Ha n

minden határon túl növekszik, $\left(\frac{9}{11}\right)^n$ zérushoz tart, így az a_n sorozatnak is létezik határértéke, ami $1/2$. Tehát az első edényben levő bor mennyiségének határértéke fél liter.

Szalay Péter (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A feladat megoldásához hozzá tartozott annak a megmutatása, hogy a keresett határérték létezik.

Ha ezt már tudnánk, (1) alapján az a_n sorozat a határértéke kielégíti az $a = \frac{9}{11}a + \frac{1}{11}$ összefüggést, azaz $a = 1/2$. Így *ha* létezik a határérték, *akkor* az $1/2$. Azt azonban, hogy a határérték létezik, külön bizonyítani kell.

2. A dolgozatok elbírálása a következő szempontok alapján történt. *Helyes:* a kifogástalan dolgozatok. *Hiányos:* Helyes összefüggéseket írnak fel, de a végső következtetést elhamarkodják. a) Elegendőnek tartják a határértékként megadott mennyiségről megállapítani, hogy az alsó korlát. b) Kihasználják a határérték kiszámítása során a határérték létezését, de nem bizonyítják azt. *Hibás:* a) Számolási hiba miatt helytelen eredményt kapnak. b) Dolgozatukból az derül ki, hogy nincsenek tisztában a szükséges matematikai fogalmakkal. **(L. L.)**