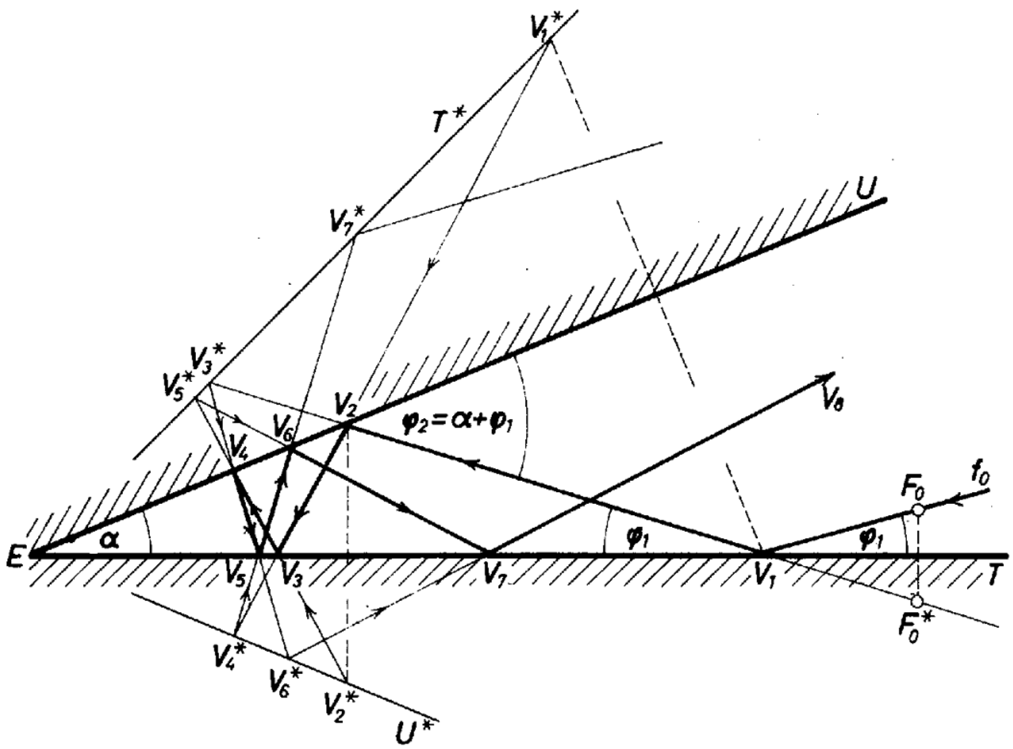
A tükröket (végtelen) félsíkoknak gondoljuk, közös határoló egyenessel – éllel –; a fényt az $\alpha$ méretű lapszög tartomány belseje felé verik vissza. Fizikai szempontokat (energiaveszteség stb.) nem veszünk figyelembe.

A fénysugárnak az első visszaverés előtti $f_0$ pályáját – útját – merőlegesnek vesszük a tükörpár $e$ élére. (Lásd alább a megjegyzést.) Ebben a felfogásban a jelenség abban az $S$ síkban játszódik le, amely átmegy $f_0$-on és merőleges $e$-re, és leegyszerűsödik az egymással a szöget bezáró $ET$ és $EU$ tükröző félegyeneseken való visszaverődésekre. Jelöljük $V_1$, $V_2$, ...-vel a fénysugár egymás utáni visszaverődési pontjait (váltakozva $ET$-n és $EU$-n), továbbá $m$-mel az adott $\alpha$-hoz a visszaverődések maximális számát.




Nevezzük – a fizikai szokástól eltérve – $f_0$ beesési szögének a $TV_1F_0 = \varphi_1$ szöget ($F_0$ az $f_0$-nak egy, a $V_1$ előtti pontja). Erre $0 < \varphi_1 \leqq \alpha$, különben nem ez volna az első visszaverődés (ti. amúgy az $EU$ valamely pontja felől jönne $f_0$).

Legyen a visszavert $f_1$ fénysugár egy ($V_1$ utáni) pontja $F_1$, ekkor a visszaverődés törvénye szerint $EV_1F_1\sphericalangle = \varphi_1$. Csak akkor nem jönne létre $EU$-n a $V_2$ beesési pont, ha $\alpha + \varphi_1 \geqq 180^\circ$ volna. De mivel $\varphi_1$ minden értékére gondolunk, minden $\alpha$-hoz választható olyan $\varphi_1$ (és persze $E$-től különböző $V_1$ is), amellyel létrejön $V_2$. És ekkor $f_1$ beesési szöge a $V_2EV_1$ háromszög külső szögeként $\varphi_2 = V_1V_2U\sphericalangle = \alpha + \varphi_1$. Eszerint minden tekintetbe vett $\alpha$-ra $m \geqq 2$.

Hasonlóan nem metszi $ET$-t a $V_2$-ben visszavert $f_2$ fénysugár, ha $\alpha + \varphi_2 \geqq 180^\circ$, azaz $2\alpha + \varphi_1 \geqq 180^\circ$. Ezt már $\varphi_1$ megválasztásával sem háríthatjuk el, ha eleve $2\alpha \geqq 180^\circ$, azaz $\frac{180^\circ}{\alpha} \leqq 2$. Másfelől ha $\alpha + \varphi_2 = \varphi_3 < 180^\circ$, akkor létrejön $V_3$, és ott éppen $\varphi_3 = \alpha + \varphi_2 = 2\alpha + \varphi_1$ lesz a beesési szög.

Meggondolásunkat ismételgetve, akkor lesz maximális a visszaverődések száma, $m$, ha $V_m$ még létrejöhetett alkalmas $\varphi_1$ mellett, azaz $(m-1)\alpha + \varphi_1 < 180^\circ$, tehát $\frac{180^\circ}{\alpha} > m - 1$, de $V_{m+1}$ már nem jöhet létre, mert bármely $\varphi_1$ mellett $m\alpha + \varphi_1 \geqq 180^\circ$ amiatt, hogy $m\alpha \geqq 180^\circ$, amiből $\frac{180^\circ}{\alpha} \leqq m$. Szavakban: ha $\frac{180^\circ}{\alpha}$ egész szám, akkor mindjárt ez a visszaverődések számának maximálisa, különben pedig az őt közrefogó két egész szám közül a nagyobbik.

Ismerve az [ ] egészrész-függvény tulajdonságait, eredményünk képlet alakban így írható:

$$m = -\left[-\frac{180^\circ}{\alpha}\right].$$

(Ezáltal a szokásoshoz közelebb jutunk a grafikonunk lépcsőinek jobb végpontjain, szokatlan helyzetben jelentkező „gombócok” értelmezésében.)

*Megjegyzések.* 1. A bevezetett egyszerűsítéssel tulajdonképpen minden lehetséges fénysugármenetnek az $e$ élre merőleges síkon való (merőleges) vetületét vizsgáltuk. Ez azért volt elég a kérdés megválaszolásához, mert egy térbeli alakzat akkor és csakis akkor létezik (= ábrázolható), ha a vetülete létezik.

Felmerülhet ez az aggály: az $S$-en vizsgált vetületünkben a felhasznált szögek nem a valódi nagyságukban mutatkoztak (nagyobbnak látszanak), ha $f_0$ nem merőleges $e$-re; érvényesek-e tehát meggondolásaink? Igen, érvényesek. Ugyanis pl. a $V_1$-beli, $\varphi_1$ nagyságú szögek megfelelői mindig egyenlők, továbbá – a törvénynek eddig nem idézett része szerint – $f_1$ „benne marad” abban a síkban, amelyet egyrészt a $V_1$-ben az első tükör síkjára állított merőleges, másrészt $f_0$ határoz meg. Ennélfogva vetítésünk a két egyező szög „vetületeit” is egyenlőknek mutatja.

Egyébként a $\varphi_1$ szög csak segédszerepet játszott megoldásunkban; azért volt célszerű a használata, mert a kérdésben az $\alpha$ is szög. A fénysugár útját megrajzolni egyszerűbb úgy, hogy $F_0$-nak az első tükörre (ill. $ET$-re) való $F_0^*$ tükörképéből indítunk félegyenest $V_1$-en át, majd $V_1$-nek vesszük a $V_1^*$ tükörképét a második tükörre ($EU$-ra), és ebből irányítunk $V_2$ felé s í. t. (A $V_1^*, V_3^*, \ldots$ és $V_2^*, V_4^*, \ldots$ képek $ET$-nek $EU$-ra való tükörképén sorakoznak, illetve $EU$-nak $ET$-re való képén.)

2. Tulajdonképpen a végtelenből jövőnek tételeztük fel a fénysugarat, de ez nem okoz változást a keresett számban. Előállítható $\varphi_1 > \alpha$ is a két tükör közti fényforrással és alkalmas réssel, de így már eleve kevesebb a visszaverődések száma.