

Az (1) feltétel megadja a függvényt a koordináta-rendszer $y = x$ egyenletű egyenesén, (3) miatt az x tengely mentén f -nek csak 0 lehet az értéke, így a (2) feltétel miatt f további értékeit elegendő a pozitív negyedsík $y < x$ feltétellel megadott felén meghatározni. Ha a harmadik feltételt

$$(4) \quad \frac{f(x, x+y)}{x+y} = \frac{f(x, y)}{y}$$

alakban írjuk fel, láthatjuk, hogy a

$$(5) \quad g(x, y) = \frac{f(x, y)}{y}$$

függvény rögzített x mellett y -ban periodikus, mégpedig x periódussal. Innen adódik a következő eljárás az f , g függvények értékeinek a meghatározására.

Ha valamely $0 < y < x$ feltételeknek eleget tevő (x, y) helyen keressük a g függvény értékét, a (2) és (5) alapján kapott

$$g(x, y) = \frac{x}{y} g(y, x)$$

összefüggés alapján ezt a kérdést először visszavezetjük $g(y, x)$ meghatározására, majd az utóbbit a (4)-nek megfelelő

$$g(y, x) = g(y, x - y)$$

összefüggés többszöri alkalmazásával $g(y, z)$ meghatározására, ahol z az $x : y$ osztás maradéka. Ha véletlenül x osztható y -nal, akkor menet közben azt kapjuk, hogy $g(y, x) = g(y, y) = 1$, tehát $g(x, y) = \frac{x}{y}$, ha nem, akkor tovább megyünk.

Ismerjük már a g függvény értékét azokon a helyeken, ahol az első koordináta osztható a másodikkal, a többi helyre pedig tudjuk, hogy

$$g(x, y) = \frac{x}{y} g(y, z),$$

ahol z az $x : y$ osztás maradéka. Vegyük észre, hogy ha most tovább megyünk, és az $y : z$ osztás maradékát v -vel jelöljük, akkor $g(x, y) = \frac{x}{z} g(z, v)$, tehát a menet közben kapott számokat „el is felejthetjük”. Mivel a számaink fogynak, az eljárás biztosan véget ér, tehát előbb vagy utóbb olyan (z, v) helyre jutunk, ahol már v osztja z -t, esetleg $v = 1$.

Akárhogy is van, azt kapjuk, hogy $g(x, y) = \frac{x}{v}$, ahol v az utolsó nem 0 maradék. Ismeretes, hogy eljárásunk az ún. euklideszi algoritmus a legnagyobb közös osztó meghatározására, tehát a keresett függvény $f(x, y) = xy/v$, ahol v az (x, y) számok legnagyobb közös osztója. A kapott xy/v szám viszont nem más, mint az x, y számok legkisebb közös többszöröse, jelöljük ezt $[x, y]$ -nal. Szokás szerint, ha x, y valamelyike 0, $[x, y]$ értékét is 0-nak definiáljuk.

Ha tehát van a feltételeknek eleget tevő függvény, az csak $f(x, y) = [x, y]$ lehet. Erre (1) és (2) nyilvánvalóan teljesül, belátjuk, hogy (3) is igaz rá. Jelöljük ismét x, y legnagyobb közös osztóját v -vel: ez lesz x és $x + y$ legnagyobb közös osztója is, emiatt (3) az

$$\frac{(x+y)xy}{v} = \frac{yx(x+y)}{v}$$

azonosságot jelent. A mondott feltételeknek tehát egyetlen függvény tesz eleget, mely az argumentumaihoz azok legkisebb közös többszörösét rendeli. Nevezetesen $f(980, 1980) = 49 \cdot 1980 = 97\,020$.