

Vegyük észre, hogy az adatok közt ott szerepel a C , D , E és A -ból alakítható mind a 6 pontpár közti távolság, továbbá bármelyiküket elhagyva, a maradó ponthármasra teljesülnek a háromszög egyenlőtlenségek. Eszerint ez a 4 pont egyértelműen meghatároz egy háromoldalú gúlát (tetraédert).

Ugyanezek érvényesek a C , D , E , B pontnégyesre. És mivel e két tetraéder CDE lapja közös, az A és B pontok kölcsönös helyzete, távolsága is meg van határozva annak az alternatívának az erejéig, hogy A és B a CDE síknak ugyanazon az oldalán van-e vagy nem. Megállapodhatunk, hogy A -t mindkétyszer a CDE sík fölött vesszük, itt legyen a B_1 megoldás is, ekkor B_2 , a másik megfelelő pont, a B_1 tükörképe a CDE síkra.

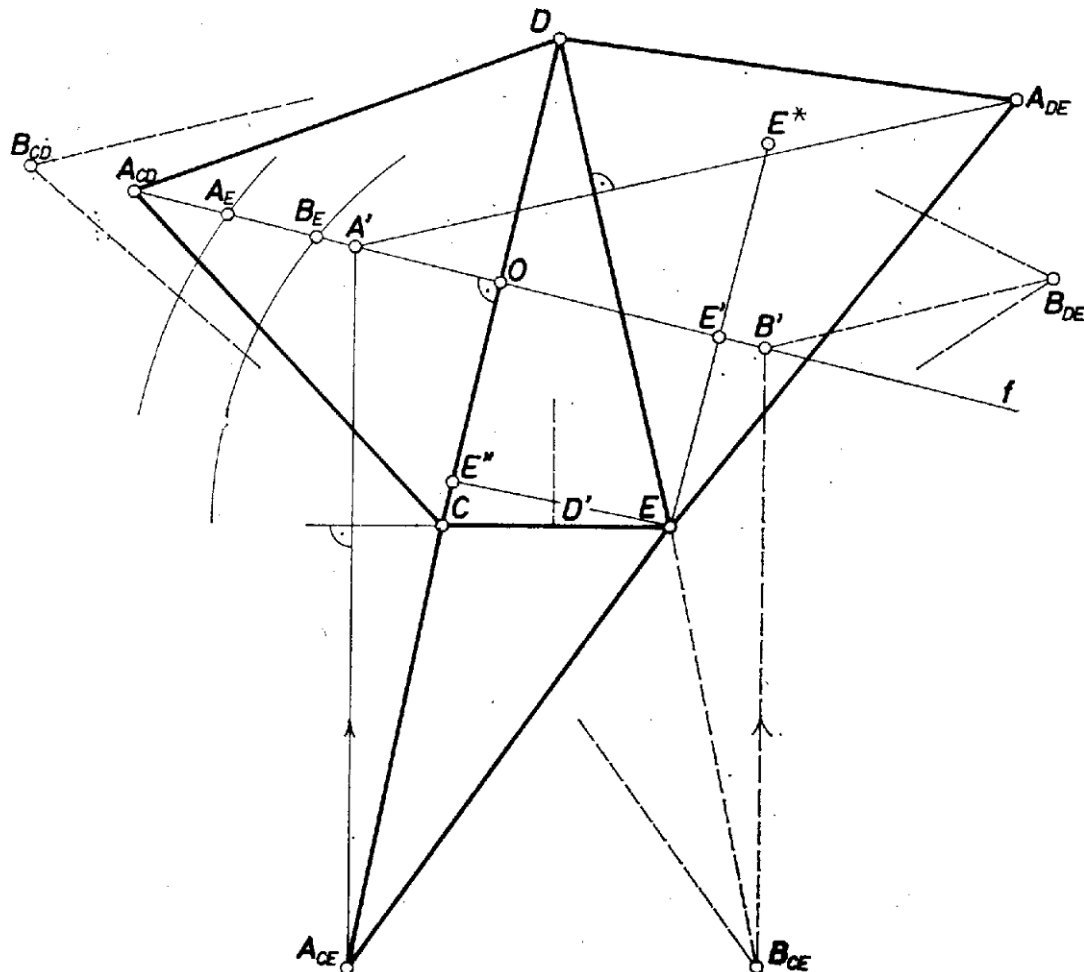
Elsősorban ezzel a kettősséggel véljük megmagyarázni a feladat kérdésének „lehet” szavát. Gondolnunk kell azonban az eddig nem említett F pontra is, amelynek a két tetraéder közös D csúcsától, valamint a nem közös A , B csúcsaitól való távolságai is elő vannak írva. Ez lesz tehát a további kérdés (AB_1 és AB_2 kiszámítása után): létezik-e az AB_1DF és az AB_2DF tetraéder? Ha esetleg csak az egyik léteznék, ez egyértelművé tenné válaszunkat.

Elgondolásunk az első kérdésre: gömböt írunk a CDE háromszög mindegyik csúcsa körül, sugárnak véve az onnan A -ig – illetve B -ig – előírt távolságot, és mindkétyszer keressük a 3 gömb közös pontjait (főnt, illetve főnt és lent), majd az ezek közti távolságokat. Ezt azonban síkbeli feladattá egyszerűsíti az az észrevétel, hogy $AC = AD$ és $BC = BD$ alapján A -nak és B -nek a CD élen levő vetülete egybeesik, méghozzá az el O felezőpontjában. Jelöljük S -sel az O -ban CD -re állított merőleges síkot, ekkor elég gondolnunk a gömbökből S által kimetszett körökre; pontosabban csupán 2–2 körre, hiszen a C és D körül írt gömbök S -ben metszik egymást, közös az S -beli körük.

Egyszerűsödik a második kérdés is ugyanebből a meglátásból, illetve előre megadható a válasz: igenis lesz közös pontja az A körül AF sugárral, B körül BF , valamint D körül DF sugárral írt gömböknek – a B_1 és B_2 megoldás mellett egyformán. Abból látjuk ezt, hogy e 3 újabb sugár rendre egyezik 1–1 már figyelembe vett mérettel. F szerepére megfelel E -nek S -re való E^* tükörképe, mert

$$E^*D = EC = 5 = FD, \quad E^*A = EA = 12 = FA, \quad E^*B = EB = 10 = FB.$$

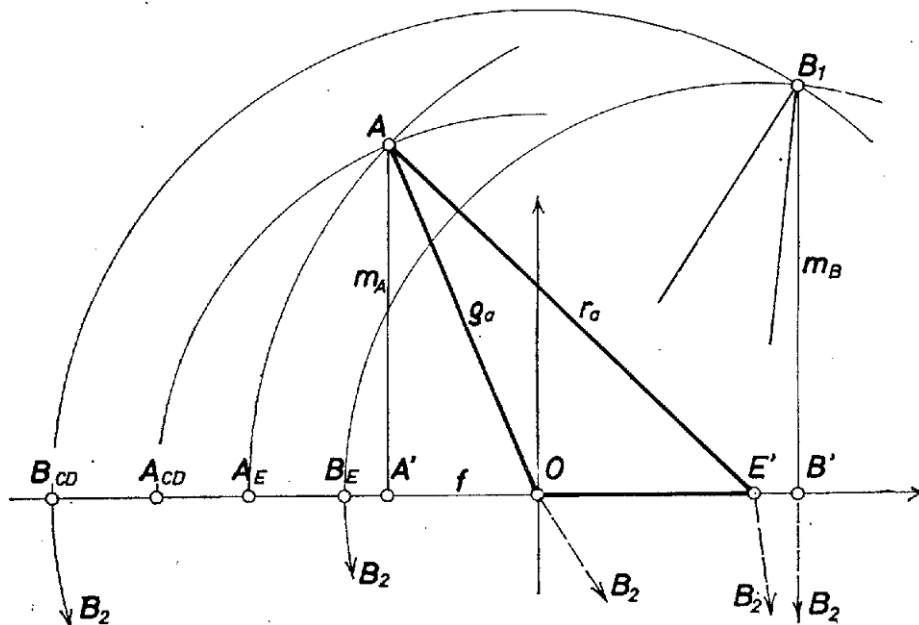
(Megfelel persze E^* -nak a DAB_1 , illetve DAB_2 síkra való tükörképe is, de elég belátni egy ilyen pont létezését.)



1. ábra

Számításaink céljára felvágjuk a tetraéder modelljének A -ból induló éleit és az oldallapokat alapélük körül belefördítjük a CDE alaplap síkjába, legyen A -nak a CD , DE , EC él körüli befördítettje A_{CD} , A_{DE} , A_{EC} . Így az oldallapok valódi nagyságban megszerkeszthetők: $A_{CD}CD$ s í. t. A lapokat visszaforgatva az $A_{CD}, \dots$ pontok a $CD, \dots$ tengelyre merőleges egyenesek „fölött” jutnak vissza A -ba, ezek metszéspontja tehát megadja az A -nak az alapsíkon levő

A' vetületét. Az 1. ábrán mindezt a B pontra is vázoljuk. Az alapsíkon levő vetület alátámasztja S -beli gondolt szerkesztésünket (2. ábra), illetve méreteket szolgáltat hozzá.



2. ábra

Rátérve a számításra, az S -ben A -t, illetve B -t meghatározó egyik-egyik kör középpontja O , illetve E -nek az f felező merőlegesen levő E' vetülete, sugaraik rendre

$$\begin{aligned} \varrho_a &= \sqrt{CA^2 - CO^2} = \sqrt{69,75}, & r_a &= \sqrt{EA^2 - EE'^2}, \\ \varrho_b &= \sqrt{CB^2 - CO^2} = \sqrt{113,75}, & r_b &= \sqrt{EB^2 - EE'^2}. \end{aligned}$$

A két középpont távolsága egyenlő a CDE háromszög E -ből induló magasságával:

$$OE' = E''E = \frac{CE \cdot D'D}{CD} = \frac{5}{11} \sqrt{11^2 - 2,5^2} = \frac{5}{11} \sqrt{114,75},$$

másrészt hasonló háromszögekből

$$EE' = CO - CE'' = \frac{CD}{2} - \frac{CE^2}{2 \cdot CD} = \frac{48}{11},$$

és most már az E' körüli körök sugarainak számértékei:

$$r_a = \frac{12}{11} \sqrt{105}, \quad r_b = \frac{2}{11} \sqrt{2449}.$$

Ezt a két sugarat is szemlélteti az 1. ábra az $E'A_E$, $E'B_E$ szakaszokban, A_E , ill. B_E végpontjukat az E körüli megfelelő gömbnek az alapsíkbeli főkörre metszi ki f -ből.

Ezek alapján az AOE' háromszögből a cosinustétel alapján

$$OA' = OA \cos AOE' = \frac{\varrho_a^2 + OE'^2 - r_a^2}{2 \cdot OE'} = -3,2346,$$

ebből A magassága az alapsík fölött

$$m_A = A'A = \sqrt{\varrho_a^2 - OA'^2} = 7,6998,$$

továbbá hasonlóan a B pontokra

$$OB' = 5,8018, \quad m_B = B'B = \pm 8,9492.$$

Ezzel tulajdonképpen A és B koordinátáit kaptuk abban a rendszerben, amelynek origója O és első tengelye f . Ezek alapján, mivel $A'B' = A'O + OB' = 9,0364$,

$$\begin{aligned} AB_1 &= \sqrt{A'B'^2 + (m_A - m_B)^2} = 9,122, \\ AB_2 &= \sqrt{A'B'^2 + (m_A + m_B)^2} = 18,943. \end{aligned}$$

Megjegyzések. 1. Tetraédereink *magasságai* rövidebben is meghatározhatók a 6–6 élből, de – mint láttuk – szükség volt A és B vetülete helyzetének meghatározására is. Ha a tetraéder egy lapjának oldalai a, b, c és a hozzájuk képest kitérő élek rendre a_1, b_1, c_1 , akkor a V térfogatra:

$$144 V^2 = (a^2 a_1^2 + b^2 b_1^2 + c^2 c_1^2)(a^2 + b^2 + c^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - 2a^2 a_1^2 (a^2 + a_1^2) - \\ - 2b^2 b_1^2 (b^2 + b_1^2) - 2c^2 c_1^2 (c^2 + c_1^2) - a^2 b^2 c^2 - a^2 b_1^2 c_1^2 - a_1^2 b^2 c_1^2 - a_1^2 b_1^2 c^2.$$

Hasonlóan az a, b, c oldalakkal bíró háromszög t területére

$$16 t^2 = 2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

(az ún. Herón-féle területképlet kifejtéséből), így

$$m_A^2 = \left(\frac{3V}{t} \right)^2 = \frac{144 V^2}{16 t^2}.$$

2. Ez a feladat sajnálatos elnézés folytán egyetlen betűben eltért a szerkesztő bizottság elgondolásától, és ezzel alapvetően megváltozott a jellege. Ez már természetes magyarázatot sejtet F „különös” szereplésére. Előre fölhívjuk megoldóink figyelmét a májusban közlendő eredeti elgondolásra.

B. T.