

I. megoldás. Tegyük fel, hogy a $P_1, \dots, P_k$ pontok indexük növekvő sorrendjében helyezkednek el. Jelöljük a $P_i P_j$ ($i \neq j$) pontpár fölé rajzolt kört K_{ij} -vel, és rendeljük hozzá minden P_t ponthoz azon K_{ij} körök színeinek halmazát, melyekre $i < j$. Így minden ponthoz hozzárendeltük az n szín egy részhalmazát. Mint ismeretes, egy n elemű halmaznak 2^n különböző részhalmaza van, így ha $k > 2^n$, létezik olyan $1 \leq q < r \leq k$, hogy a P_q és P_r pontokhoz ugyanazon színekből álló részhalmazt rendeltük. Szemléletesen fogalmazva a P_q és P_r pontokba ugyanolyan színű körök „érkeznek jobbról”. Ekkor a K_{qr} kör és az összes K_{rm} ($r < m$) kör kívülről érinti egymást, és ez utóbbi körök között a fentiek szerint biztosan létezik a K_{qr} körrel azonos színű.

Csikós Zsolt (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 1$ esetén $k > 2$, tehát van legalább egy kívülről érintkező körpáros, és ezek egyforma színűek.

Tegyük fel, hogy $(n - 1)$ -re igaz az állítás, belátjuk, hogy n -re is teljesül.

Tekintsük a $k > 2^n$ pontból és a hozzájuk tartozó n színnel kiszínezett körökből álló rendszert. Válasszunk ki ebben egy színt, nevezzük ezt kéknek, és tegyük fel, hogy a pontok az egyenesen balról jobbra, indexük növekedő sorrendjében helyezkednek el.

Megmutatjuk, hogy ha nincs két egymást kívülről érintő kék kör, akkor van a pontoknak egy legalább $k/2$ pontból álló részrendszere, amelyben nincs kék kör.

Legyen H_1 azoknak a P_i pontoknak a halmaza, amelyekhez létezik olyan $r < i$, hogy $K_{r,i}$ színe kék. H_2 legyen azoknak a P_j pontoknak a halmaza, amelyekhez létezik olyan $s > j$, hogy $K_{j,s}$ színe kék, H_3 pedig azoké, melyekből egyáltalán nem indul ki kék kör.

Világos, hogy $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ az összes pontot tartalmazza. Feltehetjük, hogy H_1 -ben legalább annyi pont van, mint H_2 -ben (ellenkező esetben e kettőt felcserélhetnénk). Így a $H = H_1 \cup H_3$ halmaz tartalmazza a pontoknak legalább

felét, azaz legalább $\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil > 2^{n-1}$ pontot. Ha két H_1 -beli P_x és P_y pontra ($x < y$) illeszkedő $K_{x,y}$ kör kék színű

volna, akkor ez a kör kívülről érintené a P_x ponton átmenő, P_x -től balra eső kék színű kört. (Ilyen van, mert $P_x \in H_1$.) Így két H_1 -beli pontot nem köt össze kék kör. Tehát a H -beli pontok fölé rajzolt körök között egyáltalán nincs kék, hiszen H_3 -beli ponton nem megy át kék kör. A H -beli pontokat összekötő körök $(n - 1)$ színnel vannak színezve, így az indukciós feltétel szerint létezik közöttük két egyforma színű, egymást kívülről érintő kör. Ezek természetesen részei a kiindulási, k pontot tartalmazó rendszernek, így az állítást igazoltuk.

Szegedy Patrik (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Megmutatjuk, hogy $k = 2^n$ esetén már létezik olyan színezés, melyben nincs két egymást kívülről érintő, azonos színű kör. $n = 1$ esetén ez nyilván teljesül, hiszen egyetlen körrel van szó. Feltéve, hogy ez az állítás igaz $(n - 1)$ -re, bizonyítjuk n -re.

Tekintsük a 2^n pontból és az őket összekötő körökből álló rendszert. Jelöljük az egyenesen balról az első 2^{n-1} pontot rendre $R_1, R_2, \dots, R_{2^{n-1}}$ -gyel, a pontok másik felét pedig rendre $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2^{n-1}}$ -gyel. Mind a két rész pontjaira illeszkedő körök kiszínezhetők a feltevés szerint $(n - 1)$ színnel. Az n -edik színt pedig arra használjuk, hogy a két részrendszert összekötő $R_i Q_j$ köröket színezzük. Így nem jön létre két egymást kívülről érintő n -edik színű kör, mert az R_i pontokból csak jobbra, a Q_j pontokból csak balra indulnak ki ilyen körök.