

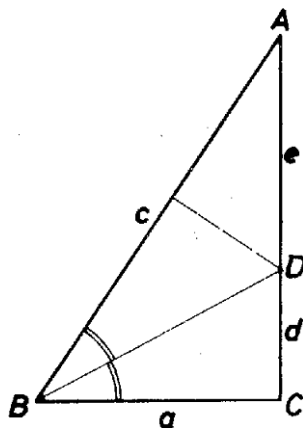
Legyen a BCD háromszög C -nél levő szöge 90° -os, és a B -nél, D -nél levő szögek közül a B -nél levő legyen a kisebb. A BC egyenes BD -re vonatkozó tükörképe messe CD -t A -ban, és az AB , BC , CA , CD , DA szakaszok hosszát jelöljük rendre c -vel, a -val, b -vel, d -vel, e -vel. Mivel az ABC háromszögben BD szögfelező, $a:c = d:e$, továbbá Pitagorasz tétele szerint

$$c^2 = a^2 + (d + e)^2.$$

Írjunk itt e helyére cd/a -t, és fejezzük ki a kapott összefüggésből c -t, majd b -t:

$$c = \frac{a^2 + d^2}{a^2 - d^2}a, \quad b = \frac{2a^2d}{a^2 - d^2}$$

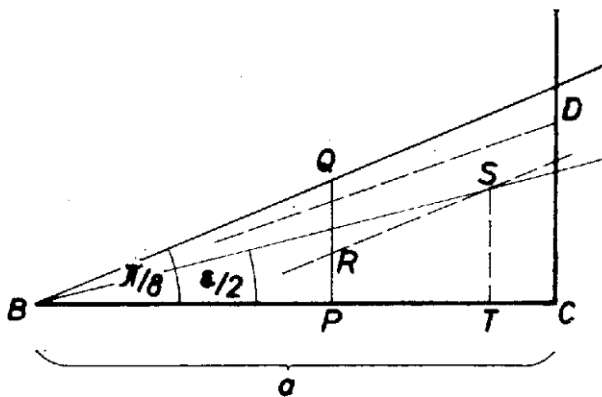
(a c -re adódó másodfokú egyenlet másik gyöke negatív).



Ha most a kapott ABC háromszög oldalait $(a^2 - d^2)/a$ -szorosukra nyújtjuk, az új $A'B'C'$ háromszög oldalainak a hossza rendre

$$(1) \quad a' = a^2 - d^2, \quad b' = 2ad, \quad c' = a^2 + d^2$$

lesz. Ennek alapján elegendő olyan BCD háromszöget találnunk, melyben a és d egészek, továbbá a CBD szög nagyobb $\varepsilon/2$ -nél.



Mérjük fel egy tetszőleges BP félegyenesre az $\varepsilon/2$, $\pi/8$ szögeket, és messe az utóbbi szárát a BP -re P -ben emelt merőleges Q -ban. Mérjük fel a Q -ból P felé induló félegyenesre az egységnyi hosszú QR szakaszt, és húzzunk párhuzamost R -en át BQ -val. Ez valahol metszi az $\varepsilon/2$ szög szárát, jelöljük ezt a pontot S -sel, S -nek BP -n levő vetületét T -vel. Legyen C a BP félegyenes tetszőleges, T -n túli pontja, melyre $a = BC$ egész szám. A C -ben BP -re emelt merőlegesnek az $\varepsilon/2$, $\pi/8$ szögek szárai közti darabja hosszabb az egységül választott QR szakasznál, így biztosan van benne olyan D pont, amelyre CD egész. (Ha a BP -re C -ben emelt merőlegesre egymás után egységnyi hosszúságú szakaszokat mérünk fel, ezek végpontjainak a sorozata nem ugorhatja át ezt a szakaszt.) Készen vagyunk, megvan az a BCD háromszög, amit kerestünk, a feladat állítását ezzel beláttuk.

Megjegyzések. 1. Akik csak képletekben hajlandók gondolkodni, most azt mondják: igen, tudni kellett a pitagoraszai számhármassokat. Valóban (1) ezek jól ismert képlete. Ne tévesszük azonban szem elől, hogy

– a pitagoraszai számhármassok előállításának a nem-triviális fele az, hogy minden derékszögű háromszöghöz van olyan a és d egész, hogy (1) előállítja a háromszög a' , b' , c' oldalait, ha a' , b' , c' egészek [az, hogy (1) derékszögű háromszöget ad meg, nyilvánvaló];

– nekünk ehelyett arra volt szükségünk, hogy uralni tudjuk a kapott háromszög szögeit a , d alkalmas megválasztásával, ami a pitagoraszai hármasok levezetésénél nem szokott szerepelni.

2. Belátható a feladat állítása annak alapján is, hogy megmutatjuk, tetszőleges n természetes számhoz található olyan nála nagyobb a természetes szám, hogy az a , $(a + 1)$ befogókkal rajzolt derékszögű háromszög átfogójának a hossza egész szám. Más szóval azt mutatjuk meg, hogy a

$$(2) \qquad 2c^2 - (2a + 1)^2 = 1$$

egyenlet egész gyökpárjai között tetszőlegesen nagy található. Ilyen egyenletekről sokszor volt már szó lapunkban (általános megoldásukról *Fried Ervin* írt cikksorozatot), így az is többször szerepelt már, hogyan lehet (2) egyetlen gyökpárjából végtelen sokat előállítani.