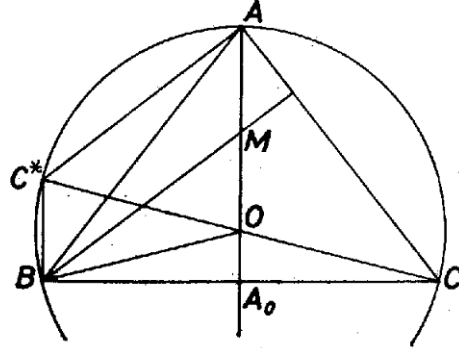


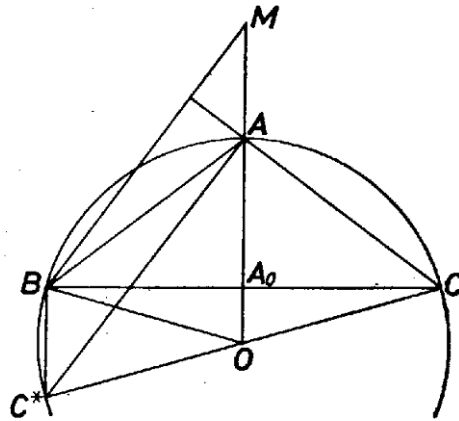
I. megoldás. Mivel $OA = 1$, azért $\cos MOA \triangleleft$ „hossza” az OA' szakasz előjellel vett hosszát jelenti, ahol A' az A csúcs vetülete az OM egyenesen, a pozitív irányt O -tól M felé választva. Így azt kell belátnunk, hogy hasonló jelölésekkel

$$(1) \quad OA' + OB' + OC' = OM.$$

Megjegyezzük, hogy szabályos háromszögben M egybeesik O -val – és semmilyen más háromszögben nem –, ott nincs értelme az állításnak.



1. ábra



2. ábra

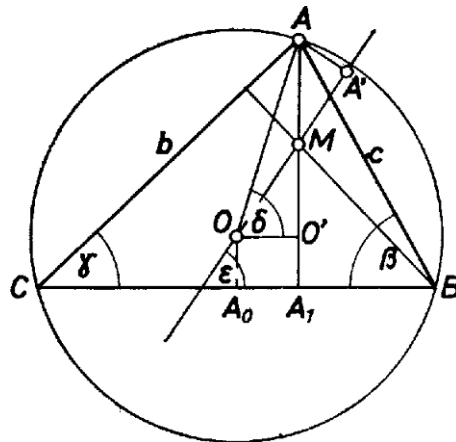
Célszerű az egyenlő szárú háromszögeket is külön elintézni, ilyenekben az OM egyenes maga a szimmetriatengely. Legyen $AB = AC (\neq BC)$, a kör C -vel átellenes pontja C^* , és a BC oldal felezőpontja A_0 ; így B' és C' egybeesik A_0 -lal, A' pedig A -val, tehát mindjárt $OA' = OA$. Az MAC^*B négyszög paralelogramma – ez az $AB \neq AC$ esetben is igaz –, mert 2–2 oldala merőleges CB -re, illetve CA -ra, ezért – az irányt most is beleértve –

$$MA = BC^* = 2A_0O = -2OA_0 = -(OB' + OC'),$$

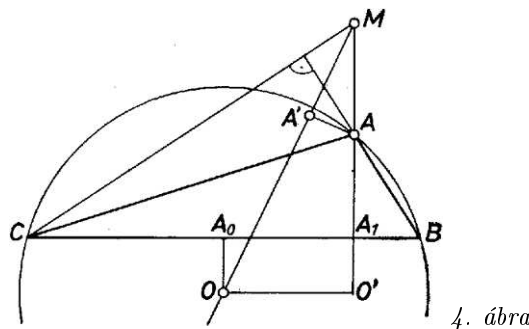
és ezekkel (1) bal oldala így alakul

$$OA' + (OB' + OC') = OA - MA = OM,$$

és ezt akartuk megmutatni (1. és 2. ábra)



3. ábra



Az általános esetre térve, a 3. és 4. ábrán úgy választottuk a betűzést, hogy teljesült az $AC = b > c = AB$ nagyságviszony, tehát $\beta > \gamma$ is. Legyen A vetülete BC -re A_1 , és O vetülete AA_1 -re O' . Az MOA látószöget az OA , OM egyenesek CB -hez való δ , ε hajlásszögeinek különbségeként határozzuk meg. Az elsőre

$$\delta = 90^\circ - \angle OAA_1 \triangleleft = 90^\circ - (\angle CAA_1 \triangleleft - \angle CAO \triangleleft) = \gamma + \frac{180^\circ - \angle COA \triangleleft}{2} = 90^\circ - (\beta - \gamma).$$

A másikkra, mindjárt a fentebbiek felhasználásával és átalakításokkal, ismert azonosságok alapján

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon &= \frac{OO'}{OM} = \frac{\cos \delta}{OM} = \frac{\sin(\beta - \gamma)}{OM}, \quad \text{és} \\ \sin \varepsilon &= \frac{O'M}{OM}, \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} O'M &= A_1A - A_1O' - MA = c \sin \beta - 3A_0O = 2 \sin \gamma \sin \beta - 3 \cos \alpha = \\ (2) \quad &= \cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma) + 3 \cos(\beta + \gamma). \end{aligned}$$

Ezekkel

$$\begin{aligned} OA' &= OA \cos(\delta - \varepsilon) = \frac{1}{OM} (\sin^2(\beta - \gamma) + \cos^2(\beta - \gamma) + 2 \cos(\beta - \gamma) \cos(\beta + \gamma)) = \\ &= \frac{1}{OM} (1 + \cos 2\beta + \cos 2\gamma). \end{aligned}$$

Mondjuk ki ehhez mindjárt: OA' „érzéken” a bevezetett $\beta > \gamma$ nagyságviszonyra, tehát megfelelő betűcserékkel hasonló kifejezést írhatunk fel OB' -re és OC' -re.

Ezekkel a bizonyítandó (1) a következő alakot veszi föl:

$$(3) \quad 3 + 2(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma) = OM^2 = O'O^2 + O'M^2.$$

Itt a jobb oldal a (2) és $O'O = \sin(\beta - \gamma)$ alapján, valamint a legutóbbi alakításokat megismételve

$$\begin{aligned} \sin^2(\beta - \gamma) + \cos^2(\beta - \gamma) + 4 \cos(\beta - \gamma) \cos(\beta + \gamma) + 4 \cos^2 \alpha &= \\ &= 1 + (2 \cos 2\beta + 2 \cos 2\gamma) + (2 + 2 \cos 2\alpha), \end{aligned}$$

vagyis egyenlő (3) bal oldalával. Ezzel az állítást minden háromszögre bebizonyítottuk, hacsak M nem azonos O -val.

Megjegyzés. A (3) bal oldalának alakításai az OM távolságra az alábbi kifejezéseket is fölírhatjuk:

$$\left(\frac{OM}{r}\right)^2 = 4 \cdot \sum \cos^2 \alpha - 3 = 9 - \sum \sin^2 \alpha = 1 - 8 \prod \cos \alpha,$$

ahol $\sum$ a 3 db $\cos^2 \alpha$ „típusú” tag összegének kiírását rövidíti, $\prod$ pedig a 3 db $\cos \alpha$ „típusú” tényező szorzatának kiírását; ilyenféle rövidítéseket inkább a fizikában szokás alkalmazni.

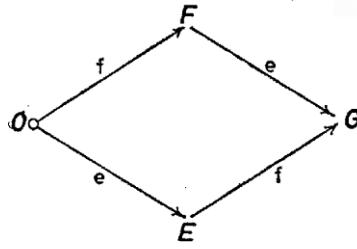
II. megoldás: Helyezzünk koordináta-rendszert az ábránkra úgy, hogy az origója O legyen, és M az x tengely pozitív felére essék. Ebben a koordináta-rendszerben az I. megoldásban használt (1) összefüggés azt jelenti, hogy az $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ vektorok első koordinátáinak összege egyenlő $\vec{OM}$ első koordinátájával. Megmutatjuk, hogy ennél több is igaz, nevezetesen

$$(1^*) \quad \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM}.$$

Helyezzük az $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ összeg kezdőpontját O -ba, és jelöljük ebben a helyzetben a végpontját M^* -gal. Ekkor

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM}^*,$$

így (1*) azt jelenti, hogy M^* azonos M -mel



5. ábra

Legyenek $\mathbf{e}$ és $\mathbf{f}$ tetszőleges irányú, egységnyi nagyságú vektorok, legyen O a közös kezdőpontjuk, a végpontjuk pedig E és F . Toljuk át f kezdőpontját E -be, új helyzetében a végpontja legyen G . Ekkor (5. ábra)

$$\vec{OG} = \vec{OE} + \vec{EG} = \mathbf{e} + \mathbf{f},$$

hiszen két vektor összeadásának egyik módja az, hogy egymás után fűzzük őket. Ugyanemiat

$$\vec{EF} = \vec{OF} - \vec{OE} = \mathbf{e} - \mathbf{f}.$$

Ha $\mathbf{e}$ és $\mathbf{f}$ azonosak, $\vec{EF}$ az ún. null-vektor. Ha $\mathbf{e}$ és $\mathbf{f}$ azonos állásúak, de ellentétes irányúak, akkor $\vec{OG} = \mathbf{0}$. Különben az O, E, G, F pontok paralelogrammát határoznak meg, és ebben $EF \perp OG$, tehát $(\mathbf{e} + \mathbf{f})$ merőleges $(\mathbf{e} - \mathbf{f})$ -re. Mondjuk azt a könnyebb beszéd kedvéért, hogy két vektor merőleges egymásra, ha állásaik merőlegesek, ha egyikük hossza sem nulla, vagy pedig valamelyikük (esetleg mindkettő) hossza 0. Így most már feltétel nélkül mondhatjuk, hogy $(\mathbf{e} + \mathbf{f})$ merőleges $(\mathbf{e} - \mathbf{f})$ -re. Mivel $\vec{OA}, \vec{OB}$ egységnyi, $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OM}^* - \vec{OC} = \vec{CM}^*$ merőleges az $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$ vektorra. Ugyancsak merőleges

$$\begin{aligned} \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{AM}^* \quad \text{az} \quad \vec{OB} - \vec{OC} = \vec{CB} \quad \text{vektorra, és} \\ \vec{OC} + \vec{OA} = \vec{BM}^* \quad \text{az} \quad \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{AC} \quad \text{vektorra.} \end{aligned}$$

Itt $\vec{BA}, \vec{CB}, \vec{AC}$ hossza nem lehet 0, mert egy háromszög oldalvektorai. Ha $\vec{AM}^*, \vec{BM}^*, \vec{CM}^*$ valamelyike $\mathbf{0}$, akkor abban a csúcsban van a háromszög magasságpontja, amelyikkel M^* azonos, hiszen ekkor O a szemközti oldal felezőpontja. Különben az AM^* és AM , BM^* és BM , CM^* és CM egyenesek azonosak, ami csak úgy lehet, ha M^* azonos M -mel.

Megjegyzések. 1. Egy sík vektorai között kétféleképp szokás szorzást definiálni; az egyik eredménye szám, azért ezt „skaláris” szorzásnak hívják, a másik eredménye vektor, így ez a „vektoriális” szorzás. Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzata $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varepsilon$, ahol ε az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ közti szög. (Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ valamelyike $\mathbf{0}$, a szorzat 0.) A definícióból kiolvasható, hogy ez a szorzás kommutatív, így erre is érvényes az $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$ összefüggés. Ebből is látszik, hogy egységvektorok összege és különbsége merőleges egymásra.

2. Ismeretes, hogy

$$\vec{OS} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}),$$

ahol S a háromszög súlypontja. Ezt (1*)-gal összevetve kapjuk, hogy $\vec{OM} = 3\vec{OS}$, vagyis S az OM szakasz O -hoz közelebbi harmadolópontja. Feladatunk II. megoldása erre az (Eulertől származó) állításra szokásos bizonyítások egyikének adaptálása.