

Ismert, hogy a háromszög t területére, beírt és hozzáírt köreinek ϱ , ϱ_a , ϱ_b és ϱ_c sugaraira, valamint s félkerületére érvényesek a következő összefüggések:

$$t = \varrho \cdot s = \varrho_a(s - a) = \varrho_b(s - b) = \varrho_c(s - c).$$

Feladatunkban – mivel nyilván a beírt kör a legkisebb és bármelyik két sugár hossza különböző – föltehetjük, hogy az oldalak nagyságviszonya: $a < b < c$. Ezért

$$\varrho_a = q \cdot \varrho, \quad \varrho_b = q^2 \cdot \varrho, \quad \varrho_c = q^3 \cdot \varrho,$$

ahol q a mértani sorozat hányadosa ($q > 1$).

Ezek szerint

$$(1) \quad \begin{aligned} q &= \frac{\varrho_a}{\varrho} = \frac{\varrho_c}{\varrho_b}, \quad \text{azaz} \quad \frac{s}{s-a} = \frac{s-b}{s-c}, \\ s(s-c) &= (s-b)(s-a), \\ (a+b+c)(a+b-c) &= (c+a-b)(c-(a-b)), \\ (a+b)^2 - c^2 &= c^2 - (a-b)^2, \\ a^2 + b^2 &= c^2, \end{aligned}$$

tehát Pitagorasz tételének megfordítása szerint a háromszög csak derékszögű lehet – ha egyáltalán létezik –, más szóval legnagyobbik szöge csak $\gamma = 90^\circ$ lehet.

Mivel azonban ennek megállapításában (1)-ben csak két arányt használtunk fel, azt még nem tudjuk, van-e olyan derékszögű háromszög, amelyben a

$$\frac{\varrho_b}{\varrho_a} = q$$

követelmény is teljesül. Ennek tisztázására a verseny ideje nem lett volna elegendő (lásd az alábbi 3. megjegyzést).

Megjegyzések. 1. Néhányan még ismerik az itt következő képleteket, amelyek alapján numerikus példában „kényelmesebben” (azaz logaritmustáblázattal) számíthatók a szögek az oldalakból, mint a „nehézkos” cosinustétellel:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}, \quad \sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}, \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

(A további két szögre vonatkozó hasonló képletek természetesen az oldalak ciklikus permutációjával írhatók föl, ami közben persze s változatlan marad.)

Az első képlet alapján közvetlenül

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\varrho \cdot \varrho_c}{\varrho_a \cdot \varrho_b}} = \sqrt{\frac{\varrho^2 q^3}{\varrho^2 q^3}} = 1,$$

$\frac{\gamma}{2} = 45^\circ$, $\gamma = 90^\circ$. Itt a háromszög létezése biztos, mert a képletek csak nemlétező háromszögek esetére adnak értelmetlen eredményt.

2. Az említett képletek – és több hasonló is – a matematikának – pontosabban a számítások végrehajtása technikájának – abból a korszakából valók, amikor a végrehajtás legfejlettebb eszköze a logaritmustáblázat volt. Arra a korszakra következtek – csak nagy ugrásokban nézve – a fogaskerekkel működő asztali számológépek, előbb kézi, majd motoros működtetéssel, ma pedig az elektronikus kalkulátorok. (A logarlécet kihagytuk, ez amazok mellett csak gyors becslésekre való.) – A képletek persze ma is érvényesek. – Szerepel azonban a $\operatorname{tg} x/2$ pl. bizonyos integrálok transzformálásában is; de felsorolni sem lehet az ilyenféle, az elméletben is jól felhasználható apró fogásokat.

3. A $\varrho_b : \varrho_a = q$ követelményt is teljesítő derékszögű háromszög nagyobbik hegyes szöge felének tangensére harmadfokú egyenletet kapunk. A fentebbihez hasonlóan

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} = \sqrt{\frac{\varrho \cdot \varrho_b}{\varrho_a \cdot \varrho_c}} = \frac{1}{q} \quad \text{és} \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{q^2} \end{aligned}$$

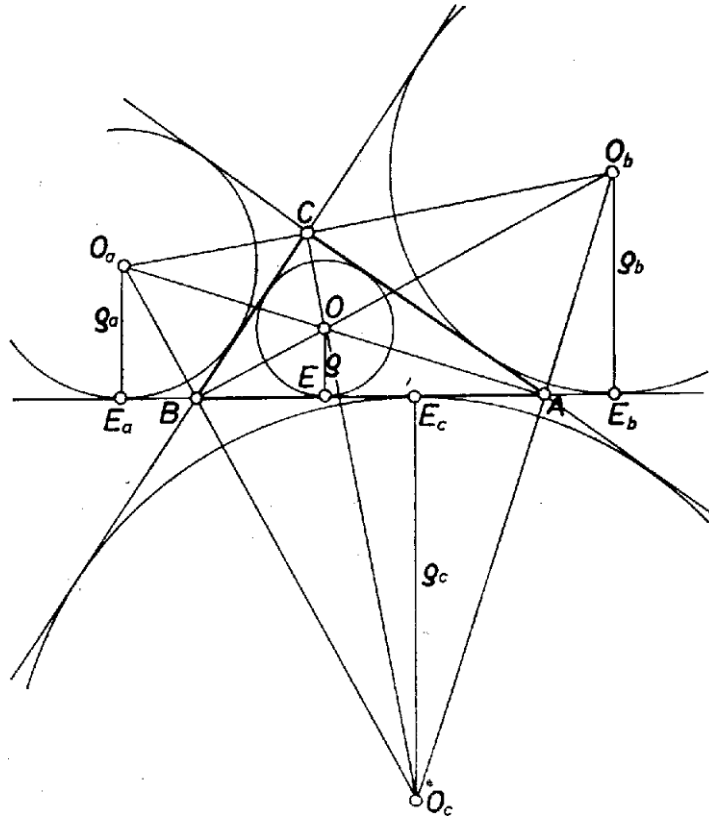
(vagyis a félszögek tangensei is mértani sorozatot alkotnak, 3 elemmel, ugyanazzal a hányadossal). Ezek alapján

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} &= \frac{1}{q^2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\beta}{2} \right) = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{q}}{1 + \frac{1}{q}} = \frac{q - 1}{q + 1}, \\ q^3 - q^2 - q - 1 &= 0.\end{aligned}$$

(Ez a „szép” egyenlet számos más, egyszerűen megfogalmazható probléma megoldásában is fel-felbukkan.) Közelítő megoldása:

$$q = 1,83929, \quad \alpha = 32^\circ 56' 6'', \quad \beta = 57^\circ 3' 54''.$$

II. megoldás. Az előző megoldás jelölésén túl legyenek a háromszög csúcsai A, B, C , a beírt kör középpontja O , a hozzáírt köröké rendre O_a, O_b, O_c úgy, hogy az O_a középpontú kör az AB, AC oldalak meghosszabbításait érinti, valamint a BC oldalt kívülről, és így tovább. Így az OO_a egyenes a BAC szöget felezi, az O_bO_c pedig az A -nál levő külső szögeket, tehát merőleges OA -ra. O az $O_aO_bO_c$ háromszögre nézve magasságpont, és belső pontja a háromszögnek, tehát ez a háromszög hegyesszögű.



Jelöljük a körök érintési pontját az AB egyenesen rendre E, E_a, E_b, E_c -vel. Így az AOE és AO_aE_a , valamint az AO_bE_b és AO_cE_c hasonló derékszögű háromszög-párokból

$$\frac{AO_a}{AO} = \frac{E_aO_a}{EO} = \frac{\varrho_a}{\varrho} = q = \frac{\varrho_c}{\varrho_b} = \frac{E_cO_c}{E_bO_b} = \frac{AO_c}{AO_b}.$$

(A q -tól jobbra látható elemek logikai sorrendje jobbról balfelé olvasva ugyanaz, mint a többieké balról q -ig.) Végezzünk kis cserét a sor két végén álló arányokban:

$$\frac{AO_a}{AO_c} = \frac{AO}{AO_b},$$

eszerint az AO_aO_c és AOO_b derékszögű háromszögek befogóinak aránya egyenlő. Ezért ez a két háromszög hasonló. Egy-egy megfelelő szögükre és az utóbbinak a csúcshölygére

$$AO_aO_c \sphericalangle (= OO_aB \sphericalangle) = AOO_b \sphericalangle = O_aOB \sphericalangle,$$

ez pedig azt jelenti, hogy a B -nél derékszögű OO_aB háromszög hegyesszögei egyenlők, tehát mindegyik 45° .

Másfelől az OO_a szakasz fölötti Thalész-kör átmegy B -n és C -n, és ezek OO_a -nak átellenes oldalán vannak, ezért

$$\frac{ACB\angle}{2} = OCB\angle = OO_aB\angle = 45^\circ,$$

tehát $ACB\angle = 90^\circ$, akkor pedig ez az ABC háromszög legnagyobb szöge. Ezzel megkaptuk a választ a feladat kérdésére.