

Nézzük meg, mit tudhatunk meg a feltétel alapján f -ről. Legyen $a = a_0$ tetszőleges, $a_1 = f(a_0)$, $a_2 = f(a_1) = a_0^2 - 2$, $a_3 = f(a_2) = a_1^2 - 2$ stb.

Ha $a_4 = a_0$, akkor természetesen $a_1 = a_5$, $a_2 = a_6$, $a_3 = a_7$, és így a_0 , a_1 , a_2 és a_3 (nem feltétlenül különböző) gyökei az $(x^2 - 2)^2 - 2 = x$ egyenletnek. Ezt nullára rendezzük, majd szorzattá alakítjuk:

$0 = x^4 - 4x^2 - x + 2 = (x^2 - x - 2)(x^2 + x - 1)$, ahonnan a gyökök $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\beta = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$, $\gamma = -1$, $\delta = 2$, továbbá $\alpha^2 - 2 = \beta$, $\beta^2 - 2 = \alpha$, $\gamma^2 - 2 = \gamma$ és $\delta^2 - 2 = \delta$.

A fenti megfontolásaink szerint $f(\alpha)$ értéke csak α , β , γ és δ lehet. Nézzük mind a négy esetet külön-külön.

- I. $f(\alpha) = \alpha$. Ekkor $f(\alpha) = f(f(\alpha)) = \alpha^2 - 2 = \beta \neq \alpha$, ami lehetetlen.
- II. $f(\alpha) = \beta$. Ekkor $f(\beta) = f(f(\alpha)) = \alpha^2 - 2 = \beta$, és így
 $f(\beta) = f(f(\beta)) = \beta^2 - 2 = \alpha \neq \beta$
- III. $f(\alpha) = \gamma$. Ekkor $f(\gamma) = f(f(\alpha)) = \alpha^2 - 2 = \beta$,
 $f(\beta) = f(f(\gamma)) = \gamma^2 - 2 = \gamma$ és így
 $f(\gamma) = f(f(\beta)) = \beta^2 - 2 = \alpha \neq \beta$.

IV. Hasonlóan kapunk ellentmondást az $f(\alpha) = \delta$ esetben is. Mivel $f(\alpha)$ értékére több lehetőségünk nincs, az f függvényt az α helyen nem tudjuk értelmezni, a keresett függvény tehát nem létezik.

Szegedy Patrik (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)