A nullát természetes számnak tekintjük, és így $a_1 = 0$, hiszen a 0 nem állítható elő két nála nagyobb szám összegeként.

Az a_1, a_2, ..., a_n számok (összesen n darab), illetve azokból alkotott párok összegei $\left(\text{összesen} \dfrac{n(n-1)}{2} \text{ darab}\right)$ együttesen ki kell hogy adják az összes, a_{n+1}-nél kisebb természetes számot, melyekből a_{n+1} van (a 0 is természetes szám). Ezért az

$$n + \frac{n(n-1)}{2} \geqq a_{n+1}$$

egyenlőtlenségnek fenn kell állnia, ahonnan $a_{n+1} < (n+1)^2$ azonnal adódik.

Károlyi Gyula (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések.

1. A dolgozatok elbírálása a következő szempontok szerint történt:

Helyes: azoké, akik a feladatot kifogásolható részek nélkül megoldották.

Kissé hiányos: azok a dolgozatok, amelyekben az a_1-et 1-nek választják és elkenik az egyenlőség ($a_1 = 1^2$) problémáját; vagy hamis magyarázatot adnak rá (pl. egy szám nem alkot sorozatot). Szerintük $n = 1$-re nem igaz az állítás, de ezt csak azzal támasztják alá, hogy $a_1 = 1$, ezt viszont nem indokolják.

Hiányos: Konkrét számsorozattal kísérleteznek, de nagyon hiányos magyarázatot adnak hozzá; nem derül ki, hogy milyen meggondolásból jutottak a sorozathoz.

Hibás: bizonyítani vagy cáfolni vélik az állítást, de okoskodásuk nem elfogadható: önmaguknak mondanak ellent, durva számolási, egyenlőtlenségkezelési hibát vétenek. Vannak (még mindig) olyanok is, akiknek csak a számtani vagy a mértani sorozat sorozat.

2. A feladatnak többféle értelmezése lehetséges. Erre a megoldók közül is többen rámutattak.

a) A nullát a természetes számok közé soroljuk, miként azt az új első osztályos gimnáziumi tankönyv is teszi. Ha most a feladatban szereplő vagylagosságot megengedő értelemben értjük (azaz egy szám akkor is lehet eleme a sorozatnak, ha két sorozatbeli szám összegeként is előállítható), akkor a közölt megoldáshoz jutunk. Ebben az esetben létezik a feltételeknek megfelelő sorozat, például a természetes számok sorozata: 0, 1, 2, 3, ... A 3-at ki is hagyhatjuk a sorozatból, mivel egyértelműen állítható elő a sorozat két különböző tagjának összegeként. Ha a 3-at kihagyjuk, akkor kihagyható az 5, és ennek következtében a 6 is. A kihagyások révén további kihagyások válnak lehetővé. Azok a számok, melyek többféleképpen is előállíthatók a sorozat két különböző tagjának összegeként, nem hagyhatók ki. Ha az előállítás egyértelműségét nem kötnénk ki, még hézagosabb sorozatok is szerkeszthetők lennének, így a_n gyorsabban nőhetne. A megoldásban nem használtuk fel az egyértelműséget, a feladat állítása tehát enélkül is érvényes.

Ha a vagylagosságot kizáró értelemben értjük (azaz a sorozat elemei nem állíthatók elő a sorozat két különböző tagjának összegeként), akkor nem létezik a feladat feltételeit kielégítő sorozat. Mivel $a_1 = 0$, $a_2 = t$ tetszőleges természetes szám esetén t eleme a sorozatnak, de előállítható a_1 és a_2 összegeként is.

b) Végül nézzük, milyen következménnyel jár, ha a nullát nem soroljuk a természetes számok közé! Ekkor a_1 szükségképpen 1-gyel egyenlő, így a feladat állítása $n = 1$-re nem teljesül. Ha a vagylagosságot megengedő értelemben értjük, akkor $n > 1$ esetén az állítás igaz. Ha a vagy kizáró értelmű, akkor a sorozat szigorúan monoton. Az első öt tag csak 1, 2, 4, 7, 10 lehet, de $1 + 10 = 4 + 7$, azaz ilyen sorozat nem létezik.