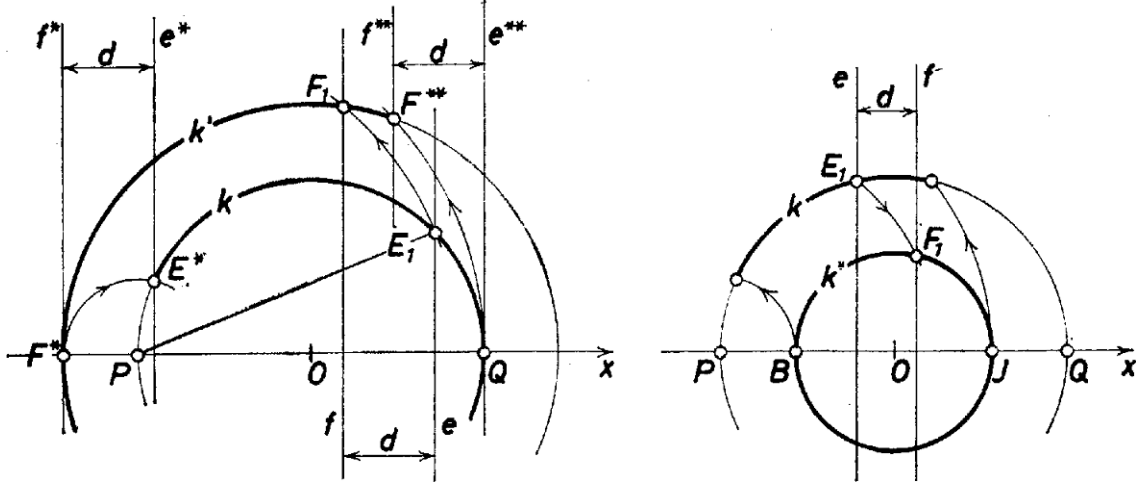


Helyezzük alakzatunkat úgy a koordináta-rendszerbe, hogy k középpontja az origóban legyen, sugara a hosszegység, és legyen $P(-1; 0)$, ekkor k egyenlete $x^2 + y^2 = 1$. Legyen továbbá az e egyenes egyenlete $x = e$, a vizsgálandó helyzetekben $-1 \leq e \leq 1$, így f egyenlete $x = e \mp d$ szerint, hogy balra, illetve jobbra van e -től.



E_1 koordinátái $(e, \sqrt{1 - e^2})$, ugyanis a szimmetria alapján elég vennünk azt, amelyiknek az ordinátája nem negatív. Hasonlóan F_1 és F_2 tükrös pontpár az x -tengelyre, így az x -tengely a keresett mértani helynek is szimmetriatengelye lesz. A P középpű, E_1 -en átmenő kör sugarára:

$$PE_1^2 = (e + 1)^2 + (1 - e^2) = 2 + 2e,$$

így e kör egyenlete: $(x + 1)^2 + y^2 = 2 + 2e (\geq 0)$

Innen a két F pont $\pm y$ ordinátájának négyzetét $x = e \mp d$ helyettesítéssel kapjuk:

$$y^2 = 2 + 2e - (e \mp d + 1)^2 = -(e \mp d)^2 + 1 \pm 2d,$$

vagyis F_1 és F_2 koordinátáinak négyzetösszege nem függ e helyzetétől, csak e és f távolságától – ami viszont állandó –, éspedig

$$x^2 + y^2 = 1 \pm 2d.$$

Eszerint az F pontok egy-egy, a k -val koncentrikus k' , illetve k'' körön vannak, melynek sugara $\sqrt{1 + 2d} (> 1)$, ekkor f balról követi e -t, illetve $\sqrt{1 - 2d} (< 1)$ ha csak $d < 1/2$. A $d = 1/2$ esetben F egyetlen lehetséges helyzete O , $d > 1/2$ mellett pedig e -től jobbra fekvő f esetében egyáltalán nincs $F_{1,2}$ pont.

Meg kell vizsgálnunk, hozzátartozik-e a mértani helyhez k' -nek, illetve k'' -nek minden pontja. k' az x tengely mentén mindkét irányban túlnyúlik k -n, ezért csak egy része felelhet meg. e -nek jobb szélső (E_1 -et adó) helyzetében $e = 1$, így k' -ből csak az $x \leq 1 - d$ ívről lehet szó. Minden ezen az íven fekvő pontja hozzá is tartozik a mértani helyhez, mert k' -nek még a bal szélső F^* pontjához is visszakereshető k -n az őt előállító E^* pont, ugyanis

$$F^*P = \sqrt{1 + 2d} - 1 < \sqrt{1 + 2d + d^2} - 1 = d.$$

(Hozzátehetjük: viszont k -nak nem minden pontja hoz létre F -et az E_1 szerepben, csak amelyekre $PQ \geq PE_1 \geq PF^*$, és egyáltalán nincs k' , ha $d > 1/2$.)

Ha pedig f jobbra van e -től, akkor k'' a k belsejében van ($d < 1/2$ mellett), és minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez. (Másképp k -nak most sem minden pontja származtat F -et; jelöljük ugyanis k'' bal és jobb szélső pontját B -vel, J -vel, így azok és csak azok a pontok adnak F -et, amelyekre $PB \leq PE_1 \leq PJ$.)