(1) mindkét oldalát 4-gyel megszorozzuk, majd teljes négyzetté egészítjük ki:

$$\left(4x^2+4ax+a^2\right)-\left(4y^2+4cy+c^2\right)=a^2-4b-c^2+4d.$$

Így ha az

$$\begin{aligned}X&=(2x+a)+(2y+c),\\Y&=(2x+a)-(2y+c),\\A&=a^2-4b-c^2+4d\end{aligned}$$

jelöléseket bevezetjük, akkor (1) az $XY=A$ alakra hozható. Mivel az $(X,\,Y)$ számpár egyértelműen meghatározza az $(x,\,y)$ számpár értékét, ha (1) végtelen sok $(x,\,y)$ számpárra teljesül, akkor X és Y közül valamelyik végtelen sok különböző értéket vehet fel, melyek mind osztói A-nak. Így szükségképpen $A=0$, tehát $a^2-4b=c^2-4d$, a feltétel szükséges.

Belátjuk, hogy elégséges is, azaz $A=0$ esetén találhatunk végtelen sok (1)-et kielégítő egészekből álló $(x,\,y)$ számpárt. Mivel (1) akkor és csak akkor teljesül, ha $XY=A=0$, azért X és Y közül valamelyik szükségképpen 0. Legyen például $Y=0$, ekkor az $(x,\,y)$ számpárt a

$$\begin{aligned}2x+a+2y+c&=X,\\2x+a-2y-c&=Y=0\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása adja, azaz

$$x=\frac{1}{4}(X-2a),\qquad y=\frac{1}{4}(X-2c).$$

Az $a^2-4b=c^2-4d$ feltételből következik, hogy a és c paritása megegyezik. Így ha X olyan páros szám, amelyre $X/2$ az a-val és c-vel megegyező paritású, akkor az egyenletrendszer megoldásai is egészek. Mivel végtelen sok ilyen X egész szám van, és ezek mindegyikére $(x,\,y)$ számpár különböző, ezért végtelen sok, (1)-et kielégítő $(x,\,y)$ számpárt találtunk.

Danyi Pál (Pécs, Nagy Lajos Gimn., I. o. t.)

Megjegyzés. Abban az esetben, amikor $c=d=0$, a feladat állítása azt jelenti, hogy az x^2+ax+b polinom akkor és csak akkor lesz végtelen sok különböző egész helyen négyzetszám, ha a polinom egy elsőfokú polinom négyzete.