Először azt mutatjuk meg, hogy a sorozat felülről korlátos. n-re vonatkozó teljes indukcióval belátjuk, hogy $a_n \leq a_1$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). $n = 1$-re igaz az állítás. Mivel a feladat nem zárja ki, hogy i egyenlő legyen j-vel, ezért $a_2 \leq a_1$ is teljesül. Bebizonyítjuk, hogy ha $n = k$-ra igaz az állítás, akkor igaz $n = (k+1)$-re is. Mivel a feladat feltétele szerint

$$a_{k+1} \leq \frac{a_k + ka_1}{k+1},$$

és az indukciós feltevés értelmében $a_k \leq a_1$, ezért $a_{k+1} \leq \dfrac{a_1 + ka_1}{k+1} = a_1$. Ezzel beláttuk, hogy a sorozat felülről korlátos. A sorozat pozitív tagú, ezért alulról is korlátos. A sorozat tehát korlátos.

A sorozat alsó korlátai között van legnagyobb, mivel minden alulról korlátos sorozatnak van legnagyobb alsó korlátja, más szóval alsó határa. (Ez ismert tétel, melynek bizonyításával itt nem foglalkozunk.) Jelöljük ezt A-val.

A továbbiakban bebizonyítjuk, hogy az a_1, a_2, $\ldots$ sorozat konvergens, és határértéke A. A konvergenciát azzal igazoljuk, hogy egy bizonyos tagtól kezdve a sorozat minden a_n elemére

$$a_n < A + \varepsilon,$$

bárhogyan adjuk is meg az ε pozitív számot. Mivel A legnagyobb alsó korlát, ezért található a sorozatnak olyan a_k eleme, amelyre

$$a_k < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

A sorozatban l taggal tovább menve, a_{k+l}-re fennáll, hogy

$$a_{k+l} \leq \frac{la_k + ka_l}{k+l}.$$

Figyelembe véve az a_k-ra vonatkozó egyenlőtlenséget

$$a_{k+l} < \frac{l\left(A + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) + ka_l}{k+l}.$$

A nagyobb oldalt tovább növeljük, ha a nevezőben $k+l$ helyébe l-et írunk. Ezért

$$a_{k+l} < A + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{ka_l}{l}.$$

Mivel $ka_l \leq ka_1$, $\dfrac{ka_l}{l} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ lesz, ha $l > \dfrac{2ka_1}{\varepsilon}$, vagyis

$$a_{k+l} < A + \varepsilon,$$

ha l elég nagy. Ez éppen a mondott konvergenciát bizonyítja.

Szegedy Patrik (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)