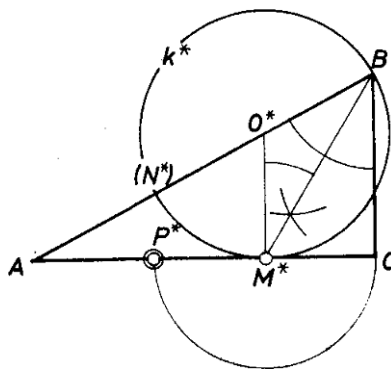


Megmutatjuk, hogy ha *két* közös pontja van k^* -nak és AC -nek: M^* és M^{**} úgy, hogy $AM^* < AM^{**}$, akkor C -nek a P^* által elért megközelítése javítható, AC -nek bármely, az M^* és M^{**} közti M_1 pontjához olyan P_1 tartozik, amelyre $CP_1 < CP^*$. – Könnyű belátni, hogy mindkét közös pont A és C között van, tehát M_1 is. Tekintsük azt a k_1 kört, amelynek O_1 középpontja az AB egyenesen van és amely átmegy M_1 -en és B -n; legyen az M_1 -ből képezett pont N_1 , továbbá messe a BM_1 egyenes k^* -ot M' -ben. Így a hasonló BN_1M_1 és BN^*M' derékszögű háromszögekből

hiszen M_1 a k^* belsejében van, tehát $BM' > BM_1$. Ekkor pedig a két átmérő AC -n levő vetületeire $CP_1 < CP^*$, amint állítottuk.



Ezek szerint csak akkor nem javítható C -nek P^* által elért megközelítése – vagyis akkor a legjobb –, ha k^* -nak pontosan egy közös pontja van AC -vel, ha M^* -ban érintkeznek. Ekkor az M^*O^* sugár merőleges AC -re és párhuzamos BC -vel, az M^*BO^* háromszög egyenlő szárú (2. ábra):

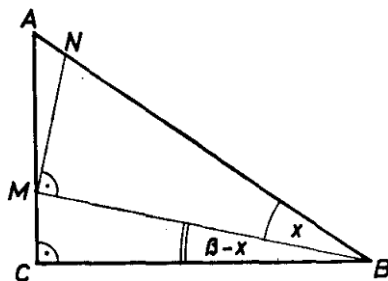
a kérdéses P^* pontot előállító M^* pontra M^*B felezi az ABC szöget. Ekkor P^* megszerkesztésében N^* mellőzhető, $M^*O^* \parallel CB$ és $BN^* = 2 \cdot BO^*$ alapján P^* a C -nek M^* -ra való tükröképe.

$$CP^* = 2CM^* = \frac{2ab}{a+c},$$

akkora a CP távolság minimuma.

II. megoldás. P definíciójából következik, hogy keresett helyzetében N is legközelebb esik B -hez, elég meghatároznunk a minimális BN -re vezető M pontot. Jellemezzük ennek helyzetét az $ABM \sphericalangle = x$ szöggel. Ekkor $MBC \sphericalangle = \beta - x$, és ismert azonosság alkalmazásával (3. ábra):

$$BN = \frac{BM}{\cos x} = \frac{BC}{\cos(\beta - x) \cos x} = \frac{2a}{\cos \beta + \cos(\beta - 2x)} \geq \frac{2a}{\cos \beta + 1}.$$



3. ábra

Egyenlőség létre is jöhet, éspedig akkor, ha $\cos(\beta - 2x) = 1$, vagyis $x = \beta/2$. Tovább az I. megoldás szerint haladhatunk.