A $d = -c$ jelöléssel (1) a következő alakba írható:

$$ax + by + dz = 0, \tag{2}$$

$$a\sqrt{1-x^2} + b\sqrt{1-y^2} + d\sqrt{1-z^2} = 0. \tag{3}$$

Az egyenletrendszernek (3) szerint csak olyan x, y, z hármas lehet megoldása, amelyre $-1 \le x,\ y,\ z \le 1$. Ekkor vannak olyan $0 \le \alpha,\ \beta,\ y \le \pi$ szögek, amelyekre $\cos\alpha = x$, $\cos\beta = y$, $\cos\gamma = z$. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{a} = (a\,\cos\alpha;\ a\,\sin\alpha)$$
$$\mathbf{b} = (b\,\cos\beta;\ b\,\sin\beta)$$
$$\mathbf{d} = (d\,\cos\gamma;\ d\sin\gamma)$$

Ezek segítségével az egyenletrendszer az $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ alakba írható, tehát a három vektornak egy háromszöget kell alkotnia. Így a valós számok körében való megoldhatóság szükséges feltétele, hogy teljesüljenek az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ vektorokra a háromszög-egyenlőtlenségek, azaz mivel $|\mathbf{a}| = |a|$, $|\mathbf{b}| = |b|$, és $|\mathbf{c}| = |c|$,

$$|a| \le |b| + |c|,\ \ |b| \le |a| + |c|,\ \ |c| \le |a| + |b|. \tag{4}$$

Ezenfelül (3) szerint a, b és d nem lehet azonos előjelű, vagy másképpen fogalmazva:

(5) a és b közül legalább az egyik előjele azonos kell legyen c előjelével.

Megmutatjuk, hogy a (4) és (5) feltételek elégségesek is. Tegyük fel, hogy a, b és c megfelel ezeknek. Feltesszük, hogy a $a > 0$, $c > 0$, a többi eset hasonlóan intézhető el. Szerkesszünk egy negatív körüljárású, esetleg elfajuló ABC háromszöget $BC = |a|$, $AC = |b|$, $AB = |c|$ oldalakkal. Helyezzük el ezt egy derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy C az origóba essen és BA párhuzamos legyen az x-tengellyel. A háromszög CB és CA oldalai α és γ szöget zárjanak be az x-tengely pozitív felével, ezekre $0 \le \alpha,\ \gamma \le \pi$. Legyen továbbá $\beta = 0$ vagy $\beta = \pi$ aszerint, hogy b pozitív-e vagy sem. Könnyen látható, hogy az $x = \cos\alpha$, $y = \cos\beta$, $z = \cos\gamma$ gyökhármas kielégíti (1)-et.

Varga Lívia (Zalaegerszeg, Ságvári E. Gimn., IV. o. t.)